

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ  
„JOSE MARTI”- EDIȚIA A VI-A**

BUCUREȘTI, 13.01.2007

**Clasa a VIII-a**

1. a) Arătați că, oricare ar fi  $a$  și  $b$  numere raționale nenule, există numerele raționale

nenule  $c$  și  $d$  astfel încât numărul  $\frac{(a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3})}{(a+b\sqrt{3})+(c+d\sqrt{3})}$  să fie rațional.

b) Arătați că, oricare ar fi  $k$  număr natural nenul, există numerele naturale  $m$  și  $n$  astfel încât  $k = \frac{mn+1}{m+n}$ .

2. Se dă triunghiul  $ABC$ , cu  $AB < AC$ . Bisectoarea unghiului  $\angle BAC$  intersectează mediatoarea segmentului  $(BC)$  în punctul  $P$ . Fie  $N$  un punct pe segmentul  $(AC)$  astfel încât  $AN = AB$ . Dacă  $M$  este intersecția dreptelor  $AP$  și  $BC$ , arătați că:

- a) triunghiul  $PNC$  este isoscel;
- b) patrulaterul  $PMNC$  este inscriptibil.

3. În prisma patrulateră regulată  $ABCD A'B'C'D'$  avem  $AB = a$ ,  $AA' = b$ . Fie  $O'$  centrul bazei  $A'B'C'D'$ .

- a) Calculați distanța dintre dreptele  $BO'$  și  $AD'$ .
- b) Calculați sinusul unghiului dintre dreptele  $BO'$  și  $AD'$ .

4. Pentru  $a \in \mathbf{R}$ , notăm cu  $[a]$  cel mai mare număr întreg cel mult egal cu  $a$  (partea întreagă a lui  $a$ ). Considerăm expresia  $E(x) = [x] + [-x]$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

- a) Determinați elementele mulțimii  $\{E(x) \mid x \in \mathbf{R}\}$ .
- b) Câte numere  $x$  din intervalul  $[0; 56]$  verifică egalitatea

$$E(x) + E(2x) + E(3x) + \dots + E(56x) + 48 = 0?$$

*Timp de lucru: 3 ore*