

Concursul de matematică „NICOLAE COCULESCU“ 2010

EDIȚIA a VII-a SLATINA – 3 decembrie 2010

Clasa a IV-a

- Se consideră suma $4 + 6 + 8 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 32 + 34 + 36$.
 - Calculați suma, eventual grupând convenabil termenii.
 - Dacă înlocuim două semne „+” cu semne „-” se obține rezultatul 118. În fața căror numere din sumă s-a pus semnul „-”?
- Bunicul și-a propus să-și împrejmuiască cu 5 rânduri de sârmă o grădină de formă dreptunghiulară cu dimensiunile de 65 m și 30 m. Cu câți metri va trebui să micșoreze lungimea grădinii, pentru a-i ajunge sârma, dacă bunicul avea doar 850 m de sârmă?
- Determinați numerele naturale de 5 cifre distincte, știind că diferența oricăror două cifre alăturate este 2.
- O carte *ciudată* este o carte în care toate paginile sunt numerotate cu numere formate numai din cifre impare. Aflați ce număr se află pe a 50-a pagină a unei cărți *ciudate*.

Clasa a V-a

- Suma a 5 numere naturale diferite este 12. Determinați suma pătratelor numerelor.

Marius Perianu

- Unsprezece numere naturale dau la împărțirea cu 20 resturi diferite. Suma tuturor resturilor obținute este mai mare decât 113. Arătați că cel puțin unul dintre resturi este număr prim.

M.A. Fianu

- Determinați numerele de forma \overline{abcd} , cu cifre nenule, care verifică relația

$$\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d + 1 = \overline{dcba}.$$

Costel Anghel

- Fie $p \geq 3$ un număr prim și $k \geq 1$ un număr natural. Determinați în câte moduri poate fi scris numărul p^k ca sumă de cel puțin două numere naturale consecutive.

Vasile Pop

Clasa a VI-a

- Fie a și b două numere naturale nenule astfel încât $a + 2^b = b + 2^a$. Arătați că $a = b$.

Florin Dumitrel

- Determinați cel mai mare număr natural de patru cifre care împărțit la 3 dă restul 1, împărțit la 5 dă restul 2 și împărțit la 7 dă restul 3.

Florin Dumitrel

- Fie $n \in \mathbb{N}$. Determinați toate numerele naturale p pentru care

$$(n, n+6) + (n+1, n+7) + \dots + (n+p, n+p+6) = 2010,$$

Maria Pop

unde (x, y) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor x și y .

- Fiecărui număr natural nenul n i se asociază un număr natural notat a_n , astfel încât să fie verificate simultan condițiile:

a) $a_{mn} = a_m + a_n$, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$;

b) $a_n = 0$ pentru orice număr natural care are ultima cifră 9.

Dacă p este un număr natural prim cu 10, arătați că $a_p = 0$.

Marius Perianu

Clasa a VII-a

1. Arătați că 2010 nu se poate scrie ca suma pătratelor a cel puțin două numere prime, impare și distincte.

Florin Dumitrel

2. Determinați cel mai mare număr natural n cu proprietatea că, scriind numerele 1, 2, ..., 2010 în orice ordine, există 15 termeni consecutivi cu suma cel puțin egală cu n .

Marius Perianu

3. Determinați soluțiile naturale ale ecuației $3^x \cdot 5^y + 4 = 7^z$.

Mihai Băluță

4. Se consideră triunghiul isoscel ABC , cu $[AB] \equiv [AC]$ și $m(\widehat{BAC}) = 110^\circ$. În interiorul triunghiului se consideră punctul D astfel încât $m(\widehat{ABD}) = 5^\circ$ și $m(\widehat{ACD}) = 10^\circ$. Determinați măsura unghiului \widehat{ADC} .

Costel Anghel

Clasa a VIII-a

1. Determinați numerele reale x, y astfel încât $x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1$ și $\sqrt{x+y} = x^2 - y$.

(***)

2. Se consideră șirul de fracții

$$\frac{1}{1}; \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{4}{3}, \frac{4}{2}, \frac{1}{5}, \dots; \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}, \frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-2}, \dots, \frac{n}{1}, \dots$$

Notăm cu a_n poziția pe care apare a $n - a$ oară în șir numărul rațional $\frac{1}{2}$; spre exemplu $a_1 = 2, a_2 = 11$ etc. Determinați a_{2010} .

Marius Perianu

3. Fie ABC un triunghi și $A' \in (BC), B' \in (CA), C' \in (AB)$ punctele de contact ale cercului înscris cu laturile triunghiului. Arătați că triunghiul $A'B'C'$ este echilateral dacă și numai dacă $\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = \frac{1}{r}$, unde r este raza cercului înscris.

Florin Dumitrel

4. Determinați numerele naturale $n \geq 2$ pentru care $\text{cmmmmc}[1, 2, \dots, n-1] = \text{cmmmmc}[1, 2, \dots, n]$.

O.T.V.