

BAREME clasa a IV-a 2010

1.

- a) $a=24$2p
b) $c = b+a$1p
 $b=2a$1p
 $11(a+b+c)=132$1p
 $\overline{abc}=246$2p

2.

Numărul căutat este de forma \overline{abcde} .

Dacă $a < 3 \Rightarrow a$ poate lua valorile 1 sau 2.

1 punct

Pentru $a = 1 \Rightarrow b = 6$, $c = 3$ și $d = 7$. Numărul devine $\overline{1637e}$

1 punct

Suma cifrelor este $(17 + e)$ și este număr impar pentru e cifră pară, $e > 5$

1 punct

Numerele obținute sunt : 16376 și 16378

1 punct

Pentru $a = 2 \Rightarrow b = 7$, $c = 6$ și $d = 8$. Numărul devine $\overline{2768e}$

1 punct

Suma cifrelor este $(23 + e)$ și este număr impar pentru e cifră pară, $e > 5$

1 punct

Numerele obținute sunt : 27686 și 27688

1 punct

3. Rezolvări și bareme:

a) (5x 0,6p)

$328 - 168 = 160$ locuri au 4 vagoane de clasa a II-a

$160 : 4 = 40$ locuri are un vagon de clasa a II-a

$40 \times 3 = 120$ locuri au 3 vagoane de clasa a II-a

$168 - 120 = 48$ locuri au 2 vagoane de clasa I

$48 \times 5 = 240$ locuri au 10 vagoane de clasa I

b)

Nr. copii

□

Nr. femei

□ □ □ □

Nr. bărbați

□ □ □ □ □ □ □ □

} 90 călători

(1,5 p)

o parte reprezintă: $90 : 9 = 10$ călători (1 p)

\Rightarrow 10 copii (0,5 p)

3 x 10 = 30 femei (0,5 p)

5 x 10 = 50 bărbați (0,5 p)

4.

- Cifrele folosite sunt 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 1p
Prima este 0, iar ultima 1 1p
Cel mai mic număr de trei cifre diferite este 102, suma cifrelor
numărului 102 este 31p
A doua cifră este 71p
Penultima este 9 sau 51p
Caz I Penultima cifră este 9, numărul este 07865432911p
Caz II Penultima cifră este 5, numărul este 07986432511p

BAREME clasa a V-a 2010

1.a) Presupunem că nici un elev nu a rezolvat toate cele 4 probleme. Dacă fiecare a rezolvat cel mult trei, atunci cei 25 de elevi au rezolvat în total

$$25 \cdot 3 = 75 \text{ de probleme.} \quad (1 \text{ punct})$$

Dar numărul total de probleme rezolvat de cei 25 de elevi este de

$$16 + 22 + 18 + 23 = 79 \text{ probleme} \quad (1 \text{ punct})$$

Avem un plus de 4 probleme rezolvate, de unde rezultă că cel puțin 4 elevi au rezolvat toate cele 4 probleme. (1 punct)

b) Suntem tentați să aflăm masa totală și să o împărțim la numărul bărcilor, astfel obținem rezultatul: $666 + 668 + \dots + 794 = 666 + (666 + 2) + (666 + 4)$

$$+ \dots + (666 + 128) = 666 \cdot 65 + 2(1 + 2 + \dots + 64) = 43290 + 4160 = 47450 \text{ Kg.}$$

Dacă împărțim 47450 Kg la 8 = 5931,25 Kg, mai puțin de 6000 Kg cât este capacitatea unei bărci. Răspunsul este greșit deoarece blocurile nu pot fi împărțite în părți mai mici, ele trebuie transportate întregi. (1 punct)

Încercăm să judecăm altfel.

Dacă punem cel mult 8 blocuri piatră într-o barcă, atunci în total vom putea transporta cel mult $8 \cdot 8 = 64$ blocuri piatră, dar cum sunt 65 de blocuri, suntem obligați ca într-o barcă să punem exact 9 blocuri de granit (1 punct)

Presupunem că le alegem pe cele 9 cele mai ușoare, astfel ele vor cântări:

$$666 + 668 + 670 + \dots + 682 = 666 \cdot 9 + 2(1 + 2 + \dots + 8) = 6066 \text{ Kg} \quad (1 \text{ punct})$$

Această greutate depășește cu 66 Kg capacitatea maximă admisă a unei bărci, în consecință nu se pot transporta cele 65 de blocuri de granit cu 8 bărci. (1 punct)

2.

$$n = 0 \quad \dots \dots \dots 2p$$

$$a) \quad x = 2 \quad \dots \dots \dots 2p$$

$$b) \quad x = 2^{2007} \quad \dots \dots \dots 1p$$

$$y = 3^{1338} \quad \dots \dots \dots 1p$$

$$x = 2^{2007} = (2^3)^{669} = 8^{669} \text{ și } y = 3^{1338} = (3^2)^{669} = 9^{669}, \text{ deci } x < y \quad \dots \dots 1p$$

3. a) $\overline{ab8} = \overline{ba} \cdot 19 + 35,$

$\overline{ba} > 35$ 1p

$100a + 10b + 8 = 19 \cdot (10b + a) + 35$ 1p

obținem $81a = 180b + 27 \Leftrightarrow 9a = 20b + 3$ 1p

$U(20b + 3) = 3$

atunci $a = 7$ și $b = 3$, deci numărul este 738.....1p

b) Numerele sunt: 201, 202, ..., 699, în total 499 numere

Resturile sunt 0, 1, 2, ...36, în total 37 de numere.....1p

$201 : 37 = 5$ rest 16, deci resturile sunt : 16, 17, ..., 36, 0, 1, 2, ..., 36, 0, 1, 2.....

În prima grupă sunt 21 de resturi,

$499 - 21 = 478$

$478 : 37 = 12$ rest 34, deci avem 12 grupe complete și încă una cu 34 de resturi1p

suma resturilor este

$(16 + 17 + \dots + 36) + (0 + 1 + 2 + \dots + 36) + \dots + (0 + 1 + 2 + \dots + 36) + \dots + (0 + 1 + 2 + \dots + 33) = 546 + 12 \cdot 666 + 561 = 9099$1p

4. a Jumătatea numărului 114 este $114 : 2 = 57$ 0.5p

Două treimi din 57 este $57 : 3 \cdot 2 = 19 \cdot 2 = 38$ 0.5p

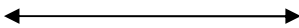
Jumătatea treimii numărului x este 38, deci treimea

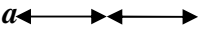
numărului x este $38 \cdot 2 = 76$ 0.5p

Numărul x este $76 \cdot 3 = 228$ 0.5p

b Reprezentare grafică sau scriere algebrică2p

Primul număr a 

Jumătatea lui a 

Două treimi din jumătate a 

6030



Jumătatea treimii lui b

Al doilea număr b

18 părți = 6030

1 parte = $6030 : 18$

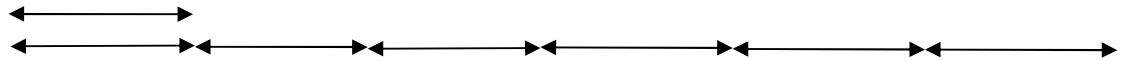
1 parte = 335

$a = 335 \cdot 6$

$a = 2010$2p

$b = 335 \cdot 12$

$b = 4020$1p



BAREME clasa a VI-a 2010

1.

a) $n = 1 \Rightarrow [1, 4] = 4$ (0,5p)

$n = 2 \Rightarrow [2, 5] = 10$ (0,5p)

$n = 3 \Rightarrow [3, 6] = 6$ (0,5p)

$n = 4 \Rightarrow [4, 7] = 28$ (0,5p)

$n = 5 \Rightarrow [5, 8] = 40$ nu convine (0,25p)

$n = 6 \Rightarrow [6, 9] = 18$ (0,5p)

$n = 7 \Rightarrow [7, 10] = 70$ nu convine (0,25p)

$n = 8 \Rightarrow [8, 11] = 88$ nu convine (0,25p)

$n = 9 \Rightarrow [9, 12] = 36$ (0,5p)

Deci, $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$. (0,25p).

b) Fie $d \mid 3n + 11$ și $d \mid 4n + 15$ (0,5p)

Atunci $d \mid 4 \cdot (3n + 11) \Rightarrow d \mid 12n + 44$ (0,5p)

$d \mid 3 \cdot (4n + 15) \Rightarrow d \mid 12n + 45$ (0,5p)

Din ultimele două relații rezultă că $d \mid (12n + 45) - (12n + 44)$

$\Rightarrow d \mid 1$ (1p).

Deci $3n+11$ și $4n+15$ sunt prime între ele (0,5p)

2.

a).Calculând, obținem: $a = \frac{10x+3y}{60}$ și $b = \frac{2x+5y}{60}$ 1p

Dacă $a = b$, rezultă $10x + 3y = 2x + 5y$, de unde obținem $y = 4x$ 1p

b).Dacă $y = 4x$, atunci obținem $a = \frac{10x+12x}{60} = \frac{11x}{30}$ și

$b = \frac{2x+20x}{60} = \frac{11x}{30}$ 1p

Dacă $a=b$ și atunci $\frac{3a+7b}{2a+3b} = \frac{3a+7a}{2a+3a} = \frac{10a}{5a} = 2$ 1p

c).Numerele a și b se pot pune sub forma:

$a = \frac{7}{30} \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \frac{28}{30} \cdot (\frac{1}{4} - \frac{1}{5})$ și $b = \frac{28}{30} \cdot (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \frac{7}{30} \cdot (\frac{1}{5} - \frac{1}{6})$

Se observă că aceste numere se obțin din a), pentru $x = \frac{7}{30}$ și $y = \frac{28}{30}$, iar $y = 4x$.

Deci conform punctului a), rezultă $a = b$.

3p

Orice altă rezolvare, prin calcul direct, este acceptată. De ex. $a=b = \frac{77}{900} = 0,08(5)$

3.

a) 5 puncte coliniare, o dreaptă; 4 puncte coliniare, 5 drepte; 3 puncte coliniare, 6 sau 8 drepte; oricare 3 puncte necoliniare, $4+3+2+1 = 10$ drepte (0.5 X 4 = 2 puncte)

b) aranjăm punctele pe laturile un triunghi, 3 puncte în cele 3 vârfuri ale triunghiului, 3 puncte pe cele 3 laturi (1 punct)

c) $9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45$ de drepte (2 puncte)

d) desenăm o stea cu 5 colțuri, trasând 5 segmente fără a ridica creionul de pe hârtie, în fiecare colț câte un punct, la intersecția oricăror 2 segmente câte un punct. (2 puncte)

4. Desen 1p

$M_1B = \frac{m+1}{2}, M_2B = \frac{m+1}{2^2}, \dots, M_8B = \frac{m+1}{2^8}$ 1,5p

$BN_1 = \frac{n-m-1}{2}, BN_2 = \frac{n-m-1}{2^2}, \dots, BN_8 = \frac{n-m-1}{2^8}$ 1,5p

$M_8N_8 = 16 \Leftrightarrow n = 2^{12}$ 2p

$m \in D_{2^{12}} = \{1; 2; 2^2; 2^3; \dots; 2^{12}\}$ 1p

BAREME clasa a VII-a 2010

1.

a) Dacă $|a| = 10 \Rightarrow a \in \{-10; 10\}$ 1 punct

Dacă $|b| = 5 \Rightarrow b \in \{-5; 5\}$ 1 punct

Din verificarea condiției $|a - b| = 15$ se obțin soluțiile
 $(a; b) \in \{(-5; 10); (5; -10)\}$ 1 punct

1 punct

b) Deoarece $5y : 5$ și $15 : 5 \Rightarrow 3x : 5 \Rightarrow x : 5$.

Pentru că $|x| < 6$ și $x \in M_5$ se obține $x \in \{-5; 0; 5\}$ 1 punct

Prin înlocuirea lui x în relația $3x + 5y = 15$ se obțin soluțiile:
 $(x; y) \in \{(-5; 6); (0; 3); (5; 0)\}$ 2 puncte

2 puncte

2. a)

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ \dots \\ a_{2005} &= 1 + \frac{1}{2005} = \frac{2006}{2005} \end{aligned} \right\} \dots (1p)$$

$$\frac{2005}{2006} > \frac{2006}{2005} \dots (1p)$$

b)

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{n+1}{n} \\ \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} &= \frac{n+3}{n} = 1 + \frac{3}{n} \end{aligned} \right\} \dots (1p)$$

$n \in \{1,3\} \dots (1p)$

c)

$$7 \cdot \left[\frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(n-2) \cdot n} \right] = \frac{2001}{4016}$$

$$\frac{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) = \frac{2001}{4016} \dots (1p)$$

$$\frac{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{n} \right) = \frac{2001}{4016}$$

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{n-7}{7n} = \frac{2001}{4016}$$

$$\frac{n-7}{2n} = \frac{2001}{4016} \dots (1p)$$

$$\frac{n-7}{n} = \frac{2001}{2008} \dots n=2008 \dots (1p)$$

3.

a) $I \in$ bisectoarei $NC \Rightarrow d(I,BC)=d(I,AC) \dots 1 p$

$I \in$ bisectoarei $BM \Rightarrow d(I,BC)=d(I,AB) \dots 1 p$

$\Rightarrow d(I,AC)=d(I,AB) \Rightarrow I \in$ bisectoarei $\sphericalangle BAC \dots 1 p$

b) Construim $[BJ$ bisectoarea $\sphericalangle ABC)$ și $[CJ$ bisectoarea $\sphericalangle ACB, J \in$ int. ΔABC și deducem $AP \perp BJ \quad AQ \perp CJ$

Dacă L e mijlocul segmentului $AB \Rightarrow M, L, P$ coliniare $\dots 1 p$

$$\sphericalangle LPB \equiv \sphericalangle PBC \Rightarrow MP \parallel BC \quad (1)$$

Dacă K e mijlocul segmentului $AC \Rightarrow N, K, Q$ coliniare

$$\sphericalangle KQC \equiv \sphericalangle QCB \Rightarrow QN \parallel BC \quad (2)$$

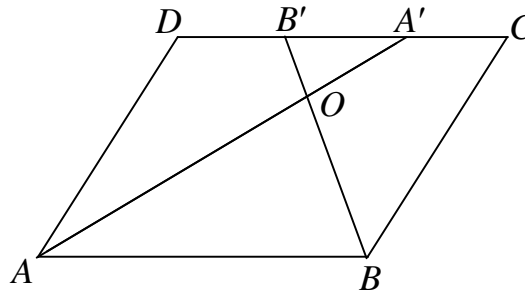
$$LK \text{ linie mijlocie} \Rightarrow LK \parallel BC \quad (3)$$

(1),(2),(3) \Rightarrow M,L,K,N coliniare și $MN \parallel BC$ 1 p

c) $MN=ML+LK+KN=\frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{CA}{2}=p$2 p

4.Barem:

a) Figura ... **1p**



[AA' bisect $\Rightarrow \sphericalangle DAA' \equiv \sphericalangle A'AB$

Dar $\sphericalangle DA'A \equiv \sphericalangle A'AB$ (a.i.)

$\Rightarrow \sphericalangle DAA' \equiv \sphericalangle DA'A$

$\Rightarrow \Delta DAA'$ isoscel

$\Rightarrow AD= DA'=\frac{2}{3} DC=6cm$

$\Rightarrow P_{ABCD} = 30cm$ **(1p)**

b)Notăm $m(\sphericalangle A'AD)=m(\sphericalangle A'AB)=a$ $m(\sphericalangle ABB')=m(\sphericalangle B'BC)=b$

Cum $m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle B)=180^\circ \Rightarrow 2a + 2b = 180^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle AOB)=180^\circ -(a+b)=90^\circ$

Deci $AA' \perp BB'$ **(1p)**

c)Ducem înălțimea [CM], $M \in BB' \Rightarrow [CM]$ mediană

$\Rightarrow [OA']$ l.m. în $\Delta CMB'$

Dacă aria $\Delta B'OA'$ este x atunci $B'O \cdot OA' = 2x$

Aria $\Delta B'MC=4x$

Aria $\Delta B'BC=8x$

(1p)

Analog calculăm aria $\Delta ADA' = 8x$

Cum $BB' = 2 \cdot B'M=4B'O \Rightarrow OB=3OB'$ analog $OA=3OA'$

$A_{\Delta AOB} = \frac{AO \cdot OB}{2} = 9x$

$A_{ABCD} = 16x cm^2$ **(1p)**

BAREME clasa a VIII-a 2010

1.

a) $\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{15}} + \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{8}} + \frac{4}{\sqrt{15}} + \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{24}} > 1+1+1=3$ 1p

b) Raționalizând numitorii nr. x și z obținem

$x = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ și $z = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ 0,5p

Înmulțim pe x, y și z cu $\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n(n+1)} - n < \frac{1}{2} < n - \sqrt{(n-1)n}$,

adevărată conform inegalității mediilor.....1p

Astfel că, obținem: $x < y < z$, orice $n \in \mathbb{N}^*$ 0,5p

c) Folosim dubla inegalitate demonstrată la punctul b):

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 1p$$

Pentru $n = \overline{1,2010}$ obținem: $\sqrt{2} - \sqrt{1} < \frac{1}{2} < \sqrt{1}$

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} < \frac{1}{2\sqrt{2}} < \sqrt{2} - \sqrt{1}$$

$$\sqrt{4} - \sqrt{3} < \frac{1}{2\sqrt{3}} < \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

.....

$$\sqrt{2011} - \sqrt{2010} < \frac{1}{2\sqrt{2010}} < \sqrt{2010} - \sqrt{2009} \dots\dots\dots 1p$$

Însumând relațiile anterioare obținem:

$$\sqrt{2011} - 1 < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{2010}} < \sqrt{2010} \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{2011} - 1) < a < 2\sqrt{2010}$$

$$\Rightarrow [a] = 88 \dots\dots\dots 1p$$

2. a) $x(x+1)=x^2+11x$

$$(x+5)(x+6)=x^2+11x+30 \dots\dots\dots 1p$$

$$x^2+11x=t$$

$$t(t+30)+225=(t+15)^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$x(x+5)(x+6)(x+11)+225=(x^2+11x+15)^2 \dots\dots\dots 1p$$

b) Ridicare la pătrat și împărțire cu 21p

substituție $\frac{x+2010}{x-2010} = a$

ecuația devine $a^2 - 2 = -\frac{1}{a^2} \Leftrightarrow a^4 - 2a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - 1)^2 = 0 \dots\dots\dots 1p$

$a \in \{-1; 1\}$

din $\frac{x+2010}{x-2010} = -1 \Rightarrow x=0 \dots\dots\dots 1p$

din $\frac{x+2010}{x-2010} = 1 \Rightarrow x \in \emptyset \dots\dots\dots 1p$

3. a). Notăm cu M și N punctele de tangență dintre cercul înscris în triunghiul ADB și laturile AD , respectiv AB . Desigur, AMO_1N este pătrat, având latura egală cu r , raza cercului înscris.....1p

$$AO_1 = r\sqrt{2}, O_1O_2 = 2r \Rightarrow AC = 2r + 2r\sqrt{2}.$$

$$\text{Cum } r = 1\text{cm} \Rightarrow AC = 2(1 + \sqrt{2})\text{cm} \Rightarrow AB = 2 + \sqrt{2}\text{cm} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

- b). $\triangle EAO_2 \cong \triangle GCO_1 \Rightarrow EO_2 = EO_1$. Prelungim AC cu segmentul AS , unde

$$AS = 2 + \sqrt{2}\text{cm} \Rightarrow EGO_1S \text{ este paralelogram, deci } ES \parallel GO_1 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$SA = EA = AO_2 \Rightarrow \triangle SEO_2 \text{ este dreptunghic, deci } SE \perp EO_2;$$

$$m[\angle(EO_2, GO_1)] = 90^\circ \dots\dots\dots 1\text{p}$$

- c). $DBFP$ este trapez; fie $PF \cap DB = \{L\}$.

În planul BCG trasăm $FQ \parallel GB, Q \in BC$

$$\triangle DBC \cong \triangle LBQ(LUL) \Rightarrow LQ = DC \text{ și } LQ \parallel DC \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$DC \perp (BFC) \Rightarrow LQ \perp (BFC), FQ \subset (BFC) \Rightarrow LQ \perp FQ \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$HBLF \text{ este paralelogram, deci } LF = DC\sqrt{3} \Rightarrow \sin(\widehat{LFQ}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

4. a) Din T. B. în $\triangle ABD \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{DP}{AP} \Rightarrow \frac{DP}{AP} = \sqrt{2} \quad (1)$

Din T. B. în $\triangle DBE \Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{DQ}{EQ} \Rightarrow \frac{DQ}{DE} = \sqrt{2} \quad (2) \quad \dots\dots\dots 1\text{p}$

Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{DP}{AP} = \frac{DQ}{EQ} \xrightarrow{R.T.T.} \Rightarrow PQ \parallel AE$

cum $AE \subset (ABE) \Rightarrow PQ \parallel (ABE) \quad \dots\dots\dots 1\text{p}$

- b) motivare $d(PQ, AE) = AP \quad \dots\dots\dots 1\text{p}$

Din $AD = 12\text{ cm}$ și $\frac{DP}{AP} = \sqrt{2}$ se află $AP = 12(\sqrt{2} - 1)\text{cm} \quad \dots\dots\dots 1\text{p}$

- c) construire pătrat $ABCD$ și romb $ABEF$ în același plan
 $BC \cap FE = \{R\}$ și definire drum minim $FC \quad \dots\dots\dots 1\text{p}$

Luăm $\triangle FRC$ dreptunghic în $R \quad BR = 6\sqrt{3}\text{ cm} \quad ER = 6\text{ cm}$

$CR = (12 + 6\sqrt{3})\text{ cm} \quad FR = 18\text{ cm} \quad \dots\dots\dots 1\text{p}$

Prin T.P. se află $FC = 12\sqrt{4 + \sqrt{3}}\text{ cm} \cong 28,8\text{cm} \quad \dots\dots\dots 1\text{p}$