



**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ  
“GHEORGHE LAZĂR”  
Ediția a VIII-a, 24-25 martie 2007  
SIBIU**

**Clasa a VII-a**

- 1) a) Să se arate că dacă  $x, y, z > 0$  și  $(x + y + z)z = 3xy$ , atunci  $x^2 + y^2 \geq 2z^2$ .  
b) Determinați numerele naturale  $a, b, c, d, e$  diferite doua câte doua, știind că:

$$1 + a^2 + ab^2 + abc^2 + abcd^2 = abcde$$

*Dumitru Barac, Sibiu*

- 2) Fie  $m, n, k$  numere reale nenule date. Să se determine numerele reale  $a, b, c$  care verifică relațiile:

$$ma + nb - c = k \text{ si } 2mnab - c^2 = k^2$$

*Monica Sas, Năsăud*

- 3) Fie triunghiul  $ABC$  în care  $AB = AC = 5$ ,  $BC = 6$  iar  $D \in (BC)$ ,  $E \in (AC)$  și  $F \in (AB)$  sunt respectiv picioarele înălțimilor duse din vârfurile  $A, B$  respectiv  $C$ . Notăm cu  $\{H\} = AD \cap BE \cap CF$  (ortocentrul triunghiului  $ABC$ ). Să se calculeze:

- a)  $HD + HE + HF$   
b) aria triunghiului  $DEF$

*Petrică Dicu, Sibiu*

- 4) Fie  $AD$  bisectoare exterioară a triunghiului  $ABC$  ( $D$  pe dreapta  $BC$ ,  $AB \neq AC$ ). Perpendicularele din  $B$  și  $C$  pe  $AD$  intersectează dreapta  $AC$  în  $E$  respectiv dreapta  $AB$  în  $F$ . Arătați că punctele  $D, E$  și  $F$  sunt coliniare.

*Emil.C Popa, Sibiu*

## Clasa a VII-a - barem de corectare

1) a) Să se arate că dacă  $x, y, z > 0$  și  $(x + y + z)z = 3xy$ , atunci  $x^2 + y^2 \geq 2z^2$ .

b) Determinați numerele naturale  $a, b, c, d, e$  diferite două câte două, știind că:

$$1 + a^2 + ab^2 + abc^2 + abcd^2 = abcde$$

*Dumitru Barac, Sibiu*

a) Folosind inegalitatea mediilor, avem

$$3xy = [(x + y + z)]z \geq (2\sqrt{xy} + z)z = 2z\sqrt{xy} + z^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Deci } 0 \geq z^2 + 2z\sqrt{xy} - 3xy = (z - \sqrt{xy})(z + 3\sqrt{xy}) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{De unde rezultă că: } z \leq \sqrt{xy} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Cum } x^2 + y^2 \geq 2xy = 2(\sqrt{xy})^2 \geq 2z^2 \text{ obținem } x^2 + y^2 \geq 2z^2 \dots\dots\dots 1p$$

b) Niciunul dintre numere nu poate fi nul ..... 0.5p

$$\text{Rezultă că } a|1, \text{ deci } a = 1 \dots\dots\dots 0.5p$$

$$\text{Ecuația devine: } 2 + b^2 + bc^2 + bcd^2 = bcde$$

$$\text{Deci } b|2 \text{ și cum } b \neq a = 1, \text{ rezultă } b = 2 \dots\dots\dots 0,5p$$

$$\text{Ecuația devine: } 3 + c^2 + cd^2 = cde$$

$$\text{De unde } c|3 \text{ și cum } c \neq a = 1, \text{ rezultă } c = 3 \dots\dots\dots 0.5p$$

$$\text{Obținem } 4 + d^2 = dc \Rightarrow d|4 \text{ și cum } d \neq a = 1, d \neq b = 2 \Rightarrow d = 4 \dots\dots\dots 0.5p$$

$$\text{Ecuația devine: } c = 5$$

$$\text{Soluția: } a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5 \dots\dots\dots 0.5p$$

**TOTAL** ..... 7p

## Clasa a VII-a - barem de corectare

2) Fie  $m, n, k$  numere reale nenule date. Să se determine numerele reale  $a, b, c$  care verifică relațiile:

$$ma + nb - c = k \text{ și } 2mnab - c^2 = k^2$$

*Monica Sas, Năsăud*

Avem: $c = ma + nb - k$ .....	1p
și $2mnab - (ma + nb - k)^2 = k^2$ .....	1p
Ultima egalitate este echivalentă cu $(ma - k)^2 + (nb - k)^2 = 0$ .....	2p
De unde: $ma - k = 0$ și $nb - k = 0$ .....	1p
adică: $a = \frac{k}{m}$ și $b = \frac{k}{n}$ .....	1p
Înlocuind în prima relație, obținem $c = k$ .....	1p
<b>TOTAL</b> .....	7p

**Clasa a VII-a - barem de corectare**

**3)** Fie triunghiul  $ABC$  în care  $AB = AC = 5$ ,  $BC = 6$  iar  $C \in (BC)$ ,  $E \in (AC)$  și  $F \in (AB)$  sunt respectiv picioarele înălțimilor duse din vârfurile  $A, B$  respectiv  $C$ . Notăm cu  $\{H\} = AD \cap BE \cap CF$  (ortocentrul triunghiului  $ABC$ ). Să se calculeze:

- a)  $HD + HE + HF$
- b) aria triunghiului  $DEF$

*Petrică Dicu, Sibiu*

a)  $AB = AC$  și  $AD \perp BC = 0 \Rightarrow BD = DC = 3 \dots\dots\dots 0.5p$

$\Delta ADC$  dreptunghic,  $AD^2 = AC^2 - DC^2 = 16 \Rightarrow AD = 4 \dots\dots\dots 0.5p$

$\Delta AHE \sim \Delta ADC$  ( $\hat{A}$ -comun,  $\widehat{AEH} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ ).

$\frac{AH}{AC} = \frac{HE}{DC} = \frac{AE}{AD} \Leftrightarrow \frac{AH}{5} = \frac{HE}{3} = \frac{AE}{4} \dots\dots\dots 0.5p$

Din teorema lui Menelaos aplicată triunghiului  $ADC$  și punctelor coliniare  $B, H, E$

obținem

$\frac{BC}{BD} \cdot \frac{HD}{HA} \cdot \frac{EA}{EC} = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{HD}{HA} \cdot \frac{EA}{EC} = 1 \dots\dots\dots 0.5p$

Cu notațiile  $HD = x$ ,  $HE = y$  și  $AE = z$  obținem sistemul

$$\begin{cases} \frac{4-x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \\ 2 \cdot \frac{x}{4-x} \cdot \frac{z}{5-z} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}, y = \frac{21}{20}, z = \frac{7}{5} \dots\dots\dots 1p$$

Cum  $HE = HF$  (triunghiul fiind isoscel), avem

$HD + HE + HF = x + y + z = \frac{9}{4} + \frac{21}{10} = \frac{87}{20} \dots\dots\dots 1p$

b) Notăm aria triunghiului  $ABC$  cu  $S_{ABC}$ . Avem:

$S_{DEF} = S_{ABC} - S_{AEF} - S_{BDF} - S_{CDE} \dots\dots\dots 0.5p$

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} - \frac{S_{BDF}}{S_{ABC}} - \frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} =$$

$$= 1 - \frac{AF \cdot AE \sin A}{AB \cdot AC \cdot \sin A} - \frac{BF \cdot BD \cdot \sin B}{BA \cdot BC \cdot \sin B} - \frac{CD \cdot CE \sin C}{BC \cdot AC \cdot \sin C} \dots\dots\dots 0.5p$$

$$= 1 - \frac{AF}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} - \frac{BF}{BA} \cdot \frac{BD}{BC} - \frac{CD}{BC} \cdot \frac{CE}{AC} \dots\dots\dots 0.5p$$

Din punctul a)  $AE = AF = \frac{7}{5}$

Deci  $\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{7}{25}$ ,  $\frac{BF}{BA} = \frac{CE}{AC} = \frac{18}{25}$ ,  $\frac{BD}{BC} = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 0.5p$

$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = 12$

Înlocuind obținem  $S_{DEF} = 12 \cdot \frac{126}{625} = \frac{1512}{625}$  .....1p

**TOTAL** .....7p

Clasa a VII-a - barem de corectare

4) Fie  $AD$  bisectoare exterioară a triunghiului  $ABC$  ( $D$  pe dreapta  $BC$ ,  $AB \neq AC$ ). Perpendicularele din  $B$  și  $C$  pe  $AD$  intersectează dreapta  $AC$  în  $E$  respectiv dreapta  $AB$  în  $F$ . Arătați că punctele  $D, E$  și  $F$  sunt coliniare.

*Emil.C Popa, Sibiu*

Conform teoremei bisectoarei  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$  ..... 2p

$EA = AB, FA = AC$  ..... 1p

$EC = FB$  ..... 1p

Deci  $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$  ..... 2p

Conform reciprocei teoremei lui Menelaos punctele  $D, E, F$  sunt coliniare ..... 1p

**TOTAL** ..... 7p