Olimpiada Națională de Matematică, clasele V-VI
Rm. Vâlcea, 24 mai 2008

Clasa a VI-a

Problema 1

Fie triunghiul echilateral ABC și punctele M, N, P astfel încât $M \in (BC)$, $N \in (CA)$, $P \in (AB)$, $m(\sphericalangle NBC) = x^0$, $m(\sphericalangle ANP) = 2 \cdot x^0$ și $m(\sphericalangle BPM) = 3 \cdot x^0$. Arătați că:

a) triunghiul BPN este isoscel.

b) dacă $x = 15$, atunci $MN \perp AC$.

Problema 2

Numerele naturale a, b, c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi. Știind că unul din cele trei numere le divide pe celelalte două, arătați că triunghiul este isoscel.

Problema 3

a) Arătați că 2008 se poate scrie ca suma modulelor a patru divizori întregi diferiți ai lui 2008.

b) Arătați că orice număr natural nenul A divizibil cu 2^n, $n \in \mathbb{N}^*$, se poate scrie ca suma modulelor a $n+1$ divizori întregi diferiți ai lui A

Problema 4

La un concurs se dau 4 probleme. Pentru rezolvarea corectă și completă a primei probleme se acordă 2 puncte, pentru rezolvarea corectă și completă a celei de-a doua probleme se acordă 3 puncte, pentru rezolvarea corectă și completă a celei de-a treia probleme se acordă 5 puncte și pentru rezolvarea corectă și completă a celei de-a patra probleme se acordă 9 puncte. Pentru fiecare problemă nerezolvată sau rezolvată incomplet se acordă un punct din oficiu. Nu se acordă punctaje intermediare.

a) Arătați că dacă doi concurenți au obținut același punctaj, atunci ei au rezolvat corect și complet aceleași probleme.

b) Demonstrați că dacă suma punctajelor tuturor concurenților este număr par mai mare sau egal cu 90, atunci una dintre probleme a fost rezolvată corect și complet de cel puțin 2 concurenți.

Notă. *Toate subiectele sunt obligatorii.*
Pentru fiecare problemă se acordă maximum 7 puncte.
Nu se acordă nici un punct din oficiu.
Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de 0 la 28 de puncte.
Timp de lucru 2 ore.