INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI OLT

OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA

12 februarie 2011
Clasa a V-a

SUBIECTUL		BAREM DE CORECTARE	PUNCTAJ TOTAL
1	a	Prin verificare directă: $7^2\cdot 41=2009$	2p
	b	Folosim a) : $2011=2009+2=7^2\cdot\left(1^2+2^2+6^2\right)+2\cdot 1^2=$ $=7^2+14^2+42^2+2\cdot 1^2$ Notând: a = 7; b = 14; c = 42 şi d = 1, obținem afirmația din enunț.	1p 2p 2p
2		Notăm d=(a, b), deci d=($3^n\cdot 5^{n+1}+3$, $3^{n+1}\cdot 5^n+2$) $\left.\begin{array}{l} d/3^n\cdot 5^{n+1}+3 \Leftrightarrow d/5\cdot 15^n+3 \\ d/3^{n+1}\cdot 5^n+2 \Leftrightarrow d/3\cdot 15^n+2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} d/15\cdot 15^n+9 \\ d/15\cdot 15^n+10 \end{array}\right\} \Rightarrow d/\left(15\cdot 15^n+10-15\cdot 15^n-9\right)$ $\Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$. Cum (a, b)=1, rezultă că numerele a şi b sunt prime între ele.	1p 2p 2p 1p 1p
3	a	$T_1=3\cdot 1+1,\ T_2=3\cdot 2+1,\ T_3=3\cdot 3+1,\ \ldots,\ T_k=3\cdot k+1,\ k\in\mathbb{N}$ $T_{2011}=3\cdot 2011+1=6034,\ T_{201}=3\cdot 201+1=604 \Rightarrow T_{2011}-T_{201}=5430$	1p 2p
	b	Termenii şirului divizibili cu 5 sunt: $T_3=T_{5\cdot 0+3}, T_8=T_{5\cdot 1+3}, T_{13}=T_{5\cdot 2+3}, T_{18}=T_{5\cdot 3+3}, \ldots$ Al 2011-lea termen al şirului divizibil cu 5 va fi: $T_{5\cdot 2010+3}=T_{10053}$. Suma căutată $S=T_3+T_8+T_{13}+\ldots+T_{10053}=$ $=(3\cdot 3+1)+(3\cdot 8+1)+(3\cdot 13+1)+\ldots+(3\cdot 10053+1)=$ $(15\cdot 0+10)+(15\cdot 1+10)+(15\cdot 2+10)+\ldots+(15\cdot 2010+10)=$ $=15\cdot(0+1+2+\ldots+2010)+\underbrace{10+10+10+\ldots+10}_{\text{de 2011 ori}}=30335935$	1p 1p 2p
4		$\overline{ab}+a+b=n^2 \Leftrightarrow 11a+2b=n^2$ Cum $a\in\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$, $b\in\{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ putem scrie $11\cdot 1+2\cdot 0\le 11a+2b\le 11\cdot 9+2\cdot 9 \Leftrightarrow 11\le 11a+2b\le 117$ Deci $11a+2b=n^2\in\{16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$ Se obține (a,b)={(1,7); (2, 7); (3, 8); (7,2); (8, 6)}	1p 1p 2p 1p 2p

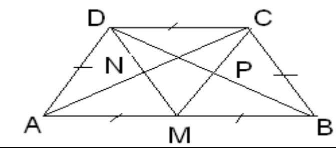
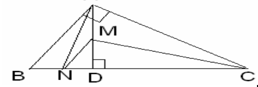
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI OLT

OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA

12 februarie 2011
Clasa a VI-a

SUBIECTUL		BAREM DE CORECTARE	PUNCTAJ TOTAL
1		$a=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{80}\right)\Leftrightarrow a=\frac{13}{80}$ $x=260\cdot\frac{80}{13}\Leftrightarrow x=1600$ $x=2^6\cdot 5^2$ Numărul divizorilor lui x este $(6+1)\cdot(2+1)=21$	**3p** **1p** **1p** **2p**
2		Notăm $a=2011^n\cdot 2012^{n+1}+2011$, $b=2011^{n+1}\cdot 2012^n+2010$ (a; b)=d, $d\in\mathbb{N}^*$. Avem d/a şi d/b Din d/a, d/b şi d/(2011a-2012b)$\Rightarrow$ $\Rightarrow d/\left(2011^2-2010\cdot 2012\right)\Rightarrow d/\left[2011^2-\left(2011^2-1\right)\right]\Rightarrow d/1$ Din d/1 şi $d\in\mathbb{N}^*$ $\Rightarrow$d=1. Deci fracția este ireductibilă	**1p** **1p** **3p** **1p** **1p**
3	**a**	Desenul cu unghiurile adiacente. Completarea desenului cu cele trei bisectoare. m($\sphericalangle$MBE)=2m ($\sphericalangle$ABF). 3m($\sphericalangle$EBF)+m($\sphericalangle$ABC)=165°. m(<CBD)=120°.	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p**
	b	m($\sphericalangle$ABM)=90° $\Rightarrow$ $\sphericalangle$ ABM unghi drept	**1p**
	c	m($\sphericalangle$ABD)=150°$\neq$180^0 $\Rightarrow$ $\sphericalangle$ABD nu este alungit, deci semidreptele nu sunt opuse.	**1p**
4	**a**	4016016=2004^2. Aria pătratului este x^2=2004$^2\cdot$y^2 , deci x=2004y. Din enunț avem $x^2-4007\cdot y^2=4006^2\Leftrightarrow(2004\cdot y)^2-4007\cdot y^2=4006^2\Leftrightarrow y^2=\frac{4006^2}{4012009}$ $y^2=4\Leftrightarrow y=2$	**1p** **2p**
	b	Căutăm $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $2^n<2004^2$. 2004^2=4016016, iar 2^{21}=2097152, 2^{22}=4194304 rezultă că pătratele vopsite cu alb sunt cele cu numerele $1=2^0$, $2^1,2^2,\ldots,$ 2^{21}, deci în total 22 pătrate vopsite cu alb. Sunt 2004-22=1982 pătrate albastre	**2p** **2p**

OLIMPIADA DE MATEMATICA FAZA LOCALA 12 februarie 2011 Clasa a VII-a

SUBIECTUL		BAREM DE CORECTARE	PUNCTAJ TOTAL
1	a	Prin calcul direct $(n+2)\cdot(n-1)^2=n^3-3n+2$ sau $n^3-3n+2=n^3+2n^2-2n^2-4n+n+2=n^2(n+2)-2n(n+2)+(n+2)=(n+2)(n-1)^2$	**1p**
	b	Fie $d\in\mathbb{N}^*$, $d=\left(n+2,\ (n-1)^2\right)$, avem $\begin{cases} d/(n+2) \\ d/(n^2-2n+1) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} d/(n^2+2n) \\ d/(n^2-2n+1) \end{cases}\Rightarrow d/(-4n+1)$ $\begin{cases} d/(n+2) \\ d/(-4n+1) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} d/(4n+8) \\ d/(-4n+1) \end{cases}\Rightarrow d/9\Rightarrow d\in\{1,\ 3,\ 9\}$	**1p** **2p**
	c)	Din $7/A\Rightarrow\ 7/(n+2)(n-1)^2$; deoarece 7 este număr prim obținem $7/(n+2)$ sau $7/(n-1)^2\Leftrightarrow 7/(n+2)$ sau $7/(n-1)$ Obținem $n+2=7k,\ k\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow n=7k-2,\ k\in\mathbb{N}^*$ sau $n-1=7q,\ q\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n=7q+1,\ q\in\mathbb{N}$. Deci $n\in\{7k-2,\ k\in\mathbb{N}^*\}\cup\{7q+1,\ q\in\mathbb{N}\}$	**1p** **2p**
2		$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2011}\Leftrightarrow 2011\cdot x+2011\cdot y=x\cdot y\Leftrightarrow y=\frac{2011\cdot x}{x-2011},\ x\neq 2011$ $y\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\begin{cases}(x-2011)/2011\cdot x \\ (x-2011)/(x-2011)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2011)/2011\cdot x \\ (x-2011)/\left(2011\cdot x-2011^2\right)\end{cases}\Leftrightarrow$ $(x-2011)/2011^2\Leftrightarrow x-2011\in\{1,\ 2011,\ 2011^2\}\Leftrightarrow x\in\{\ 2012,\ 4022,\ 4046132\}$. Deci $(x,y)\in\{\ (2012,\ 4046132);\ (4022,\ 4022);\ (\ 4046132,\ 2012)\}$	**1p** **2p** **2p** **2p**
3	a	Din AM//CD şi AM=CD rezultă că AMCD este paralelogram, deci CM=DA. Dar $CM=\frac{AB}{2}$ deoarece $DA=\frac{AB}{2}\Rightarrow\Delta CAB$ este drepunghic în C. 	**3p**
	b	MB//CD şi MB=CD rezultă că MBCD este paralelogram, deci PC=PM şi PB=PD. Cum P e mijlocul lui $[MC]\Rightarrow[BP]$ este mediană în ΔMBC, deci $A_{\Delta PMB}=\frac{A_{\Delta MBC}}{2}$ [CM] este mediană în ΔCAB, deci $A_{\Delta CMA}=A_{\Delta CMB}=2\cdot A_{\Delta PMB}$ (1) Dar $A_{\Delta CMA}=A_{\Delta CAD}$, deoarece triunghiurile sunt congruente $\Rightarrow$ $\Rightarrow A_{\Delta CAD}=2\cdot A_{\Delta PMB}$ (2). Din relațiile (1)şi (2) avem: $A_{ABCD}=A_{\Delta CAD}+A_{\Delta CMA}+A_{\Delta CMB}\Rightarrow A_{ABCD}=6\cdot A_{\Delta PMB}\Rightarrow A_{\Delta PMB}=\frac{A_{ABCD}}{6}$	**3p** **1p**
4		În $\Delta ABC,\ m(\measuredangle BAC)=90^0,\ AD\perp BC,\ D\in(BC)\Rightarrow$ $\Rightarrow m(\measuredangle ABD)=m(\measuredangle DAC)=90^0-m(\measuredangle BAD)$  Din $m(\measuredangle ADB)=m(\measuredangle BAC)=90^0$ şi $\measuredangle B$ comun $\overset{U.U.}{\Rightarrow}\Delta ADB\sim\Delta CAB\Rightarrow$	**1p**

$\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{AB}$ (1) "$\Rightarrow$" În ΔADB din MN//AB $\overset{T.Thales}{\Rightarrow}\frac{AM}{AD}=\frac{BN}{BD}\Rightarrow\frac{AM}{BN}=\frac{AD}{BD}$ (2) **1p**

Din (1) şi (2)$\Rightarrow\frac{AM}{BN}=\frac{AC}{AB}$ (3) Din (3) şi $\measuredangle ABN\equiv\measuredangle CAM\overset{L.U.L.}{\Rightarrow}\Delta ABN\sim\Delta CAM\Rightarrow\measuredangle BAN\equiv\measuredangle ACM$ **1p**

" " **1p**

$\Leftarrow$ Din $\measuredangle ABN\equiv\measuredangle CAM$ şi $\measuredangle BAN\equiv\measuredangle ACM\overset{U.U.}{\Rightarrow}\Delta ABN\sim\Delta CAM\Rightarrow\frac{AM}{BN}=\frac{AC}{AB}$ (4) **1p**

Din (1) şi (4)$\Rightarrow\frac{AD}{BD}=\frac{AM}{BN}\Rightarrow\frac{BN}{BD}=\frac{AM}{AD}\overset{T.Thales}{\Rightarrow}MN\,//\,AB$ **1p**

1p

OLIMPIADA DE MATEMATICA FAZA LOCALA 12 februarie 2011

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL		BAREM DE CORECTARE	PUNCTAJ TOTAL
1		$x=[x]+\{x\}\Rightarrow 4044121\{x\}^2-4022\{x\}-4040101[x]+1=0$ $\left(2011\{x\}-1\right)^2=4040101[x]$ (1) Dar $0\le\{x\}<1\Rightarrow 0\le 2011\{x\}<2011$ $\Rightarrow 2011\{x\}-1<2010\Rightarrow\left(2011\{x\}-1\right)^2<4040100$ Deci $\left.\begin{matrix}4040101[x]<4010100\\ 4040101[x]\ge 0 \text{ din } (1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow[x]=0$ Deci $2011\{x\}-1=0\Rightarrow\{x\}=\frac{1}{2011}\Rightarrow x=\frac{1}{2011}$	1p 1p 1p 1p 2p 1p
2		$\left\|5-2\sqrt{6}\right\|=5-2\sqrt{6},\ \left\|4-2\sqrt{6}\right\|=2\sqrt{6}-4\Rightarrow\|x\|+\frac{25}{\|x\|}+4\|y\|+\frac{1}{16\|y\|}\le 11$ $\|x\|+\frac{25}{\|x\|}\ge 10,\ 4\|y\|+\frac{1}{16\|y\|}\ge 1$ (avem formula $a+b\ge 2\sqrt{ab}$, $a, b\in\mathbb{Q}^*$) Folosind aceste inegalități și inegalitatea din enunț avem $\|x\|+\frac{25}{\|x\|}+4\|y\|+\frac{1}{16\|y\|}=11\Leftrightarrow\|x\|-10+\frac{25}{\|x\|}+4\|y\|-1+\frac{1}{16\|y\|}=0\Leftrightarrow$ $\frac{\left(\|x\|-5\right)^2}{\|x\|}+\frac{\left(8\|y\|-1\right)^2}{16\|y\|}=0\Leftrightarrow\|x\|=5,\ \|y\|=\frac{1}{8}$. $8\cdot\sqrt{2011\left(x^2-y^2+\frac{103}{16}\right)}=2011\in\mathbb{N}$	1p 1p 2p 2p 1p
3		Cum ABCD este paralelogram și $AC\cap BD=\{O\}\Rightarrow OA=OC,\ OB=OD$	1p
		În ΔAMC din $m(\measuredangle AMC)=90^0$ și $OA=OC\Rightarrow OM=OA=OC=\frac{AC}{2}$ În ΔMBD avem $OB=OD=\frac{BD}{2}$, conform formulei medianei avem: $MO^2=\frac{2\cdot\left(MB^2+MD^2\right)-BD^2}{4}\Rightarrow AC^2+BD^2=2\cdot\left(MB^2+MD^2\right)$ Știm că $2\cdot\left(a^2+b^2\right)\ge(a+b)^2$, oricare ar fi $a, b\in\mathbb{R}$, egalitatea are loc pentru a=b. Deci $2\cdot\left(MB^2+MD^2\right)\ge(MB+MD)^2$, egalitatea are loc pentru MB=MD. Deci $AC^2+BD^2\ge(MB+MD)^2$, egalitatea are loc pentru MB=MD	1p 2p 1p 1p 1p
4	a	Calculul distanței de la D la EF : $\frac{\sqrt{7}a}{2}$ Aria triunghiului DEF este $\frac{\sqrt{7}a^2}{4}$	1p 1p
	b	$AD\perp(ABE)$, $\{O\}=DE\cap CF$, DCEF paralelogram, $\{Q\}=AE\cap BF$ iar QO linie mijlocie în ΔADE rezultă $QO\perp(ABE)$ iar $d(O,(ABE))=QO=\frac{AD}{2}=\frac{a}{2}$ $ME\perp AB$, M aparține segmentului AB si $ME\perp(ABC)$, construim $ON\perp DM$, N aparține dreptei DM iar ON//ME, $ON\perp(ABC)$ atunci $d(O,(ABC))=ON==\frac{ME}{2}=\frac{\sqrt{3}a}{4}$ $\frac{a}{2}>\frac{\sqrt{3}a}{4}$,deci $d(O,(ABE))>d(O,(ABC))$	1p 1p 1p
	c	Completarea figurii cu paralelipipedul drept ABEFDCTP atunci **<(BD,AE)=<(PE,AE)=<PEQ, unde PE//BD** În ΔPQE, m(<EQP)=90°, cos(<PEQ)=QE/PE=$\frac{\sqrt{2}}{4}$	1p 1p 1p