Ministerul Educaţiei şi Cercetării
Serviciul Naţional de Evaluare şi Examinare

A 54-a Olimpiadă Naţională de Matematică
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti
8 martie 2003

CLASA A VII-A

Subiectul 1

Determinaţi mulţimile disjuncte B şi C ştiind că $B \cup C = \{1, 2, \ldots, 10\}$ şi produsul elementelor mulţimii B este egal cu suma elementelor mulţimii C.

Subiectul 2

În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\angle A) = 90°$), D este intersecţia bisectoarei unghiului A cu latura (BC), iar P şi Q sunt proiecţiile punctului D pe laturile (AB), respectiv (AC). Dacă $BQ \cap DP = \{M\}, CP \cap DQ = \{N\}, BQ \cap CP = \{H\}$, arătaţi că:

a) $PM = DN$;
b) $MN \,||\, BC$;
c) $AH \perp BC$.

Subiectul 3

Un grilaj pătrat este construit din $2n$ bare verticale şi $2n$ bare orizontale echidistante. Se vopsesc cu roşu n bare verticale şi n bare orizontale, restul barelor vopsindu-se cu negru.

Determinaţi cel mai mic număr natural nenul n astfel încât, oricum am vopsi barele cu regula de mai sus, să existe un pătrat format din intersecţia unor bare de aceeaşi culoare.

Subiectul 4

Fie ABC un triunghi oarecare. Fie B' simetricul lui B faţă de C, C' simetricul lui C faţă de A şi A' simetricul lui A faţă de B.

a) Demonstraţi că aria triunghiului $AC'A'$ este dublul ariei triunghiului ABC.

b) Dacă ştergem punctele A, B, C, cum pot fi ele reconstituite? Justificaţi raţionamentul.

Timp de lucru: 3 ore

Ministerul Educaţiei şi Cercetării
Serviciul Naţional de Evaluare şi Examinare

A 54-a Olimpiadă Naţională de Matematică
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti

8 martie 2003

CLASA A VIII-A

Subiectul 1

Fie ABC un triunghi echilateral. Pe planul (ABC) se ridică perpendicularele AA' şi BB' de aceeaşi parte a planului, astfel încât $AA' = AB$ şi $BB' = \frac{1}{2}AB$. Determinaţi măsura unghiului dintre planele (ABC) şi $(A'B'C)$.

Subiectul 2

Fie o mulţime finită $M \subset \mathbf{R}$ care are cel puţin două elemente. Spunem că funcţia f are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă $f : M \to M$ şi există $a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}$ cu $f(x) = ax + b$.

a) Arătaţi că există cel puţin o funcţie cu proprietatea $\mathcal{P}$.

b) Arătaţi că există cel mult două funcţii cu proprietatea $\mathcal{P}$.

c) Dacă M are 2003 elemente cu suma 0 şi dacă există două funcţii cu proprietatea $\mathcal{P}$, arătaţi că $0 \in M$.

Subiectul 3

Se consideră un tablou în formă de pătrat astfel încât pe fiecare linie şi fiecare coloană să avem n căsuţe $(n \geq 2)$ care se completează cu numere întregi. Determinaţi în câte moduri poate fi completat tabloul dacă produsul numerelor de pe fiecare linie şi coloană este 5 sau -5.

Subiectul 4

a) Fie MNP un triunghi astfel încât $\angle MNP > 60°$. Arătaţi că latura MP nu poate fi cea mai mică latură a triunghiului MNP.

b) Într-un plan se consideră triunghiul echilateral ABC. Punctul V care nu aparţine planului (ABC) este ales astfel încât $\angle VAB = \angle VBC = \angle VCA$. Arătaţi că dacă $VA = AB$, tetraedrul $VABC$ este regulat.

Timp de lucru: 3 ore