Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală – Timişoara, 30 aprilie 2008

CLASA A VII-A – SOLUŢII

Subiectul 1. În ipoteza $AF \perp BF$, observăm că patrulaterul $ABDF$ este inscriptibil, deci $\angle ABF = \angle ADF$ şi $\angle BAF = \angle DAE$. . . . . 1 punct

Rezultă $\angle BAD = \angle FAE$, de unde $\Delta ABD \sim \Delta AFE$, deci $\dfrac{BD}{FE} = \dfrac{AD}{AE}$. 1 punct

Pe de altă parte, $\Delta ADE \sim \Delta DCE$, de unde rezultă $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{CD}{DE}$. 1 punct

Atunci $\dfrac{BD}{FE} = \dfrac{CD}{DE}$, de unde $EF \cdot DC = BD \cdot DE$. . . . . 1 punct

Reciproc, din $EF \cdot DC = BD \cdot DE$ avem $\dfrac{BD}{FE} = \dfrac{CD}{DE}$ şi apoi $\Delta ADE \sim \Delta DCE$, de unde $\dfrac{CD}{DE} = \dfrac{AD}{AE}$. . . . . 1 punct

Urmează $\dfrac{BD}{FE} = \dfrac{AD}{AE}$, deci $\Delta ABD \sim \Delta AFE$, de unde $\angle AFE = \angle ABD$. 1 punct

Obţinem $ABDF$ inscriptibil, deci $\angle AFB = \angle BDA$, de unde $AF \perp BF$. 1 punct

Subiectul 2. Laturile a, b ale dreptunghiului se împart în m_1, respectiv n_1 segmente de lungime u formându-se 200 de pătrate de latură u şi în m_2, respectiv n_2 segmente de lungime v formându-se 288 de pătrate de latură v. Avem $m_1 n_1 = 200$, $m_2 n_2 = 288$. . . . . 1 punct

În plus, $\dfrac{a}{m_1} = \dfrac{b}{n_1} = u$ şi $\dfrac{a}{m_2} = \dfrac{b}{n_2} = v$. . . . . 1 punct

Avem $u^2 = \left(\frac{a}{m_1}\right)^2 = \frac{ab}{200}, v^2 = \left(\frac{a}{m_2}\right)^2 = \frac{ab}{288}$, de unde $m_1^2 = \frac{200a}{b}, m_2^2 = \frac{288a}{b}$ .... 2 puncte

Rezultă $2m_2 > m_1$ şi analog $2n_2 > n_1$. Fie $m_3 = 2m_2 - m_1$ şi $n_3 = 2n_2 - n_1$. Atunci $\frac{m_3}{a} = \frac{2m_2}{a} - \frac{m_1}{a}$, $\frac{n_3}{b} = \frac{2n_2}{b} - \frac{n_1}{b}$, deci $\frac{a}{m_3} = \frac{b}{n_3} = z$.

Avem $m_1n_2 = \frac{a}{u} \cdot \frac{b}{v} = \frac{b}{u} \cdot \frac{a}{v} = n_1m_2$, şi $m_1n_1 \cdot m_2n_2 = 200 \cdot 288 = 240^2$, deci $m_1n_2 = m_2n_1 = 240$. .... 1 punct

Atunci $m_3n_3 = 4m_2n_2 + m_1n_1 - 2m_1n_2 - 2m_2n_1 = 4 \cdot 288 + 200 - 4 \cdot 240 = 392$, deci împărţind laturile dreptunghiului în m_3, respectiv n_3 segmente de lungime z, obţinem 392 pătrate de latură z. .... 2 puncte

Subiectul 3. Din enunţ rezultă $2q^2 - 193 \le r^2 \le 2p^2 - 49$, deci $q^2 - p^2 \le 72$. .... 2 puncte

Pe de altă parte, din $5 \le p < q < r$ rezultă $r \ge 11$, deci $2p^2 \ge 49 + 121 = 170$, adică $p \ge 11$. .... 1 punct

Cum $(q-p)(q+p) \le 72$ şi $q - p = 2$ sau $q - p \ge 4$, rezultă

i) $q - p = 2$ şi $q + p \le 36$, deci $(p, q) = (11, 13)$ sau $(17, 19)$;

ii) $q - p \ge 4$ şi $q + p \le 18$, fără soluţii în urma condiţiei $p \ge 11$.2 puncte

Dacă $(p, q) = (11, 13)$, atunci $145 \le r^2 \le 193$, de unde $r = 13 = q$, ceea ce nu convine. .... 1 punct

Dacă $(p, q) = (17, 19)$, atunci $529 \le r^2 \le 529$, de unde $r = 23$. În concluzie, $p = 17, q = 19, r = 23$. .... 1 punct

Subiectul 4. Fie P mijlocul laturii BC şi Q intersecţia dreptelor DC şi EF. Cum MP este linie mijlocie în triunghiul BCD avem $MP \parallel BD$, deci $FQ \perp MP$. .... 2 puncte

Din $MC \perp FP$ rezultă că Q este ortocentrul triunghiului MPF, deci $PQ \perp FM$. .... 2 puncte

Congruenţa LUL a triunghiurilor POQ şi NOE arată că $QP \parallel EN$. 2 puncte

Rezultă $FM \perp EN$, ceea ce trebuia arătat. .... 1 punct