Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Neptun – Mangalia, 13 aprilie 2009

CLASA A VII-a, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Problema 1. Considerăm triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ cu $AB = A_1B_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = 60°$ şi $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 180°$. Să se arate că

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{A_1C_1}.$$

Soluţie Alipim cele două triunghiuri astfel încât laturile egale să coincidă ($A = A_1$ şi $B = B_1$) iar dreapta AB să despartă punctele C şi C_1.
....**2 puncte**

Deoarece $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 180°$, punctele B, C şi C_1 sunt coliniare.
....**1 punct**

Fie $D \in (CA_1$ astfel încât $C_1D \parallel AB$. Din teorema fundamentală a asemănării avem

$$\frac{DC_1}{AB} = \frac{CD}{CA}.$$

....**2 puncte**

Triunghiul ADC_1 este echilateral, deoarece $\angle DAC_1 = \angle AC_1D = 60°$.
....**1 puncte**

Atunci $\dfrac{AC_1}{AB} = \dfrac{AC + AC_1}{AC}$, de unde

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{A_1C_1}.$$

....**1 punct**

Problema 2. Un pătrat de latură 5 se împarte în 25 de pătrate de latură 1. În fiecare pătrat unitate se scrie câte un număr strict pozitiv şi mai mic decât 1, astfel încât:
- suma numerelor de pe fiecare linie este un număr natural;
- suma numerelor de pe fiecare coloană este un număr natural;
- suma celor 25 de numere este egală cu 11.

a) Să se arate că cel puţin unul dintre cele 25 de numere este mai mare sau egal decât $\frac{3}{5}$.

b) Dacă un singur număr dintre cele 25 de numere este mai mare decât $\frac{3}{5}$, să se arate că sumele numerelor de pe linia şi coloana ce îl conţin sunt egale.

Soluţie. a) Presupunem că toate numerele sunt mai mici strict decât $\frac{3}{5}$. Atunci suma numerelor pe fiecare linie este strict mai mică decât $5 \cdot \frac{3}{5} = 3$, deci cel mult egală cu 2.

....**2 puncte**

De aici rezultă că suma tuturor numerelor este mai mică decât $5 \cdot 2 = 10$, contradicţie.

....**1 punct**

b) Suma numerelor de pe linia, respectiv coloana ce conţine numărul maxim este mai mică decât $4 \cdot 0,6 + 1 = 3,4$, deci cel mult egală cu 3.

....**2 puncte**

Pe celelalte 4 linii şi pe celelalte 4 coloane suma este maxim 2, iar $11 > 2 \cdot 5$, deci există o linie şi o coloană cu suma numerelor măcar 3, anume chiar cele ce conţin numărul maxim.

....**2 puncte**

Problema 3. a) Fie m, n numere naturale nenule, $m > 1$. Să se arate că numărul $m^4 + 4n^4$ nu este prim.

b) Să se arate că numărul $3^{4^5} + 4^{5^6}$ se descompune în produs de doi factori, fiecare mai mare decât 10^{2009}.

Soluţie. a) Avem

$$m^4 + 4n^4 = m^4 + 4n^4 + 4m^2n^2 - 4m^2n^2 = (m^2 + 2n^2)^2 - (2mn)^2$$

....**1 punct**

$= (m^2 + 2n^2 + 2mn)(m^2 + 2n^2 - 2mn)$

....**1 punct**

Cum $m^2 + 2n^2 + 2mn > m^2 + 2n^2 - 2mn = n^2 + (m - n)^2 > 1$, rezultă cerinţa

....**1 punct**

b) Pentru $m = 3^{4^4}$ şi $n = 4^{\frac{5^6-1}{4}} = 4^{3906}$ avem descompunerea

$$3^{4^5} + 4^{5^6} = [(3^{256} - 4^{3906})^2 + (4^{3906})^2][(3^{256} + 4^{3906})^2 + (4^{3906})^2].$$

....**2 puncte**

Cum $4^{3906} > 4^{3900} = 1024^{780} > 1000^{780} = 10^{2340}$, rezultă că $(4^{3906})^2 > 10^{2009}$, deci ambii factori ai descompunerii sunt mai mari decât 10^{2009}.

....**2 puncte**

Problema 4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi fie D un punct în interiorul triunghiului astfel încât $\angle ADB - \angle ACB = 90°$ şi $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

a) Să se calculeze suma măsurilor unghiurilor $\angle DAC$ şi $\angle DBC$.

b) Să se calculeze $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.

Soluţie. a) Avem

$$\angle DAC + \angle DBC = 180° - \angle ADC - \angle ACD + 180° - \angle BDC - \angle BCD =$$

....**1 punct**

$= [360° - (\angle ADC + \angle BDC)] - \angle ACB = \angle ADB - \angle ACB = 90°.$

....**2 puncte**

b) Considerăm punctul E în interiorul unghiului $\angle ADB$ cu proprietatea că $DE = BD$ şi $\angle BDE = 90°$. Atunci $\angle ADE = \angle ACB$.

Din ipoteză avem $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$, ceea ce se scrie $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{DE}$. De aici rezultă asemănarea triunghiurilor ACB şi ADE.

....**2 puncte**

Obţinem $\angle EAD = \angle BAC$ şi $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AB}{AE}$, ceea ce implică asemănarea triunghiurilor ABE şi ACD.

....**1 punct**

Urmează

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \frac{BE}{CD} \cdot \frac{CD}{BD} = \frac{BE}{BD} = \frac{BD\sqrt{2}}{BD} = \sqrt{2}.$$

....**1 punct**

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania
Inspectoratul Şcolar Judeţean Constanţa

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Neptun – Mangalia, 13 aprilie 2009

CLASA a VIII-a, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Problema 1. Să se determine numerele naturale n ce satisfac simultan proprietăţile:

a) câtul împărţirii lui n la 9 este un număr natural de trei cifre, toate cele trei cifre fiind egale;

b) câtul împărţirii lui $n+36$ la 4 este un număr natural de patru cifre, cifrele fiind 2, 0, 0, 9, nu neapărat în această ordine.

Soluţie Avem $n = 9 \cdot 111 \cdot a + r$, unde $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ şi $r < 9$ este număr natural,

. . . . **1 punct**

deci $n \leq 9 \cdot 999 + 8 = 8999$ şi apoi $\dfrac{n+36}{4} < 2258$,

. . . . **1 punct**

ceea ce arată că $\left[\dfrac{n+36}{4}\right] = 2009$ sau 2090.

. . . . **2 puncte**

Dacă $\left[\dfrac{n+36}{4}\right] = 2009$, atunci $n+36 = 4 \cdot 2009 + q$, unde $q \in \{0, 1, 2, 3\}$, deci $n \in \{8000, 8001, 8002, 8003\}$. Dintre acestea, doar 8000 convine, deoarece câtul împărţirii numerelor 8001, 8002, 8003 la 9 este 889.

. . . . **2 puncte**

Dacă $\left[\dfrac{n+36}{4}\right] = 2090$, atunci $n+36 = 4 \cdot 2090 + q$, unde $q \in \{0, 1, 2, 3\}$, deci $n \in \{8324, 8325, 8326, 8327\}$. Niciun un număr nu verifică prima cerinţă, deci $n = 8000$.

. . . . **1 punct**

Problema 2. De o parte şi de alta a planului triunghiului ABC se consideră punctele S şi P astfel încât $SA = SB = SC$ şi $PA \perp PB \perp PC \perp PA$. Ştiind că volumul piramidei $PABC$ este egal cu dublul volumului piramidei $SABC$, să se arate că dreapta SP trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC.

Soluţie. Notăm cu O, respectiv H proiecţiile punctelor S şi P pe planul (ABC). Fie G punctul de intersecţie al dreptei SP cu planul triunghiului.

Din congruenţa triunghiurilor SOA, SOB, SOC rezultă că $OA = OB = OC$, deci O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

. . . . **1 punct**

Deoarece $PA \perp (PBC)$ avem $PA \perp BC$; în plus $PH \perp BC$, rezultă $BC \perp (PAH)$, de unde $AH \perp BC$. Analog $BH \perp AC$, deci H este ortocentrul triunghiului ABC.

. . . . **2 puncte**

Dacă $O = H$, atunci triunghiul ABC este echilateral, punctele G, H, O coincid şi cerinţa este demonstrată.

. . . . **1 punct**

Dacă punctele O şi H sunt distincte, atunci G, H, O sunt coliniare, deoarece $SO \parallel PH$ şi $G \in SP$. Din condiţia asupra volumelor rezultă $2SO = PH$, iar din asemănarea triunghiurilor dreptunghice GOS şi GHP obţinem

$$\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2}.$$

. . . . **2 puncte**

Fie M mijlocul segmentului BC şi Γ centrul de greutate al triunghiului ABC. Atunci triunghiurile $AH\Gamma$ şi $OM\Gamma$ sunt asemenea, de unde $\frac{O\Gamma}{\Gamma H} = \frac{1}{2}$, adică $G = \Gamma$, ceea ce trebuia arătat.

. . . . **1 punct**

Problema 3. Pentru numerele reale a, b, c notăm $x = |a| + |b| + |c|$ şi $y = |a-2| + |b-2| + |c-2|$.

a) Să se arate că $x + y \geq 6$.

b) Ştiind că a, b, $c \in [-1, 3]$ şi că media aritmetică a numerelor a, b, c este 1, să se arate că $x + y \leq 10$.

Soluţie. a) Din inegalitatea modulului avem $|t| + |t-2| \geq |t - (t-2)| = 2$ oricare ar fi numărul real t.

. . . . **1 punct**

Atunci $|x| + |y| = (|a| + |a-2|) + (|b| + |b-2|) + (|c| + |c-2|) \geq 2 + 2 + 2 = 6$.

. . . . **1 punct**

b) Fie $f(t) = |t| + |t-2|$. Observăm că pentru $t \in [0, 2]$ avem $f(t) = t + (2-t) = 2$,

. . . . **1 punct**

pentru $t \in (2, 3]$ avem $f(t) = 2t - 2 \leq 4$, iar pentru $t \in [-1, 0)$ avem $f(t) = 2 - 2t \leq 4$.

. . . . **1 punct**

Vom arăta că dacă a, b, $c \in [-1, 3]$ şi $a + b + c = 3$, atunci unul dintre cele trei numere este în intervalul $[0, 2]$. Fie $a \leq b \leq c$. Este evident că nu putem avea $a, b, c \in [-1, 0)$ sau $a, b, c \in (2, 3]$.

. . . . **1 punct**

Dacă $a, b, c \notin [0, 2]$, rămân cazurile:

- $a, b \in [-1, 0)$ şi $c \in (2, 3]$
- $a \in [-1, 0)$ şi $b, c \in (2, 3]$.

În primul caz avem $a + b + c < 0 + 0 + 3 = 3$, fals, iar în al doilea caz avem $a + b + c > -1 + 2 + 2 = 3$, fals.

. . . . **1 punct**

În concluzie, $|x| + |y| = f(a) + f(b) + f(c) \leq 4 + 2 + 4 = 10$.

. . . . **1 punct**

Problema 4. Prin plane paralele la feţele sale, un cub se împarte în 27 de paralelipipede dreptunghice, dintre care exact două sunt cuburi. Să se arate că cele două cuburi au muchii de lungimi egale.

Soluţie. Fie A un vârf al cubului. Muchiile din A sunt împărţite de planele paralele la feţe în câte trei segmente. Într-adevăr, în caz contrar s-ar folosi 26 de plane paralele la o faţă sau 8 plane paralele la o faţă şi 2 plane la o altă faţă. Ambele cazuri produc 27 de paralelipipede cu o dimesiune egală cu cea a cubului iniţial, deci niciun cub, fals.

. . . . **1 punct**

Notăm cu x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3 şi z_1, z_2, z_3 lungimile segmentelor generate pe muchiile din A. Observăm că

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = z_1 + z_2 + z_3, \tag{1}$$

sumele reprezentând lungimea muchiei cubului.

. . . . **1 punct**

Dacă cele două cuburi au dimensiunile $a \neq b$, atunci $a = x_i = y_j = z_k$ şi $b = x_p = y_q = z_r$, cu $i \neq p$, $j \neq q$ şi $k \neq r$.

. . . . **2 puncte**

Fie u cel de-al treilea număr din mulţimea $\{1, 2, 3\} \setminus \{i, p\}$, $v \in \{1, 2, 3\} \setminus \{j, q\}$ şi $t \in \{1, 2, 3\} \setminus \{k, r\}$. Relaţia (1) devine

$$a + b + x_u = a + b + y_v = a + b + z_t,$$

deci

$$x_u = y_v = z_t,$$

. . . . **2 puncte**

ceea ce arată că printre cele 27 de paralelipipede mai există un al treilea, fals.

. . . . **1 punct**