

Olimpiada de matematică  
etapa pe școală – 21.01.2010

Clasa a VIII-a

- 2 p 1. Fie  $x = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$
- a) Arătați că  $x^2 \in \mathbb{N}$ .
- b) Calculați  $(x + 2\sqrt{3})^{2010}$ .
2. a) Dacă  $9x^2 + y^2 - 6 \cdot (x\sqrt{2} + y\sqrt{3}) + 29 = 0$  atunci arătați că numărul
- 3 p 
$$n = \left( \frac{1 - \sqrt{2}}{3x} - \frac{2 - 3\sqrt{3}}{y} \right) \cdot \left( \frac{9\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{36} \right)^{-1}$$
 este număr natural
- b) Dacă  $x^2 + x - 1 = 0$ , calculați  $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 7$
- c) Dacă  $a > 0$  și  $x \in [-a; a]$ , arătați că  $\sqrt{2a} \leq \sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} \leq 2\sqrt{a}$
3. Fie paralelogramul ABCD cu latura  $AB = 2AD = 2a$ , ( $a > 0$ ). Pe planul paralelogramului se ridică perpendiculara  $NA = a$ .
- a) Demonstrați că  $BM \perp (NAM)$ , unde M este mijlocul laturii CD
- b) Determinați măsura unghiului format de dreapta MN cu planul paralelogramului precum și distanța de la punctul A la planul (NMIB), în cazul când  $m(\widehat{BCD}) = 120^\circ$
4. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Dacă E este piciorul perpendicularei din D pe bisectoarea unghiului DAB, iar M este mijlocul lui CD, arătați că EM  $\parallel$  (ABC)
- 1 p

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

Succes!

