CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

"PITAGORA" – EDIȚIA A XIV-A

Proba individuală – 6 mai 2011

Clasa a III-a

Subiectul 1

Un număr natural n , de patru cifre, are suma cifrelor egală cu 35.
Aflați suma cifrelor numărului $n+1$.

Inst. Elena Maiug, Rm. Vâlcea

Subiectul 2

a) Fiind date numerele 1, 2, 3, 4, 5 în această ordine, puneți semne de operații şi paranteze pentru a obține ca rezultate 2; 1; 4; 20; 3.

b) Schimbând ordinea numerelor date şi folosind paranteze, obțineți 4 ca rezultat al calculelor în patru moduri.

Inst. Nicoleta Savu, Rm. Vâlcea
Inst. Emil Popa, Călimăneşti

Subiectul 3

Într-un parc sunt părinți cu copii. Numărul copiilor este de trei ori mai mare decât numărul părinților. Dacă ar pleca 15 copii și ar veni 9 părinți, atunci numărul copiilor ar fi egal cu numărul părinților. Câți copii și câți părinți sunt în parc?

Înv. Maria Radu,
C.N.I. Matei Basarab, Rm. Vâlcea

Subiectul 4

Trei prieteni participă la două concursuri de matematică. La primul Andrei primeşte cu 20 lei mai mult decât Dragoş, iar Vasile cu 20 lei mai mult decât Andrei. La al doilea concurs Dragoş primeşte cu 50 lei mai mult decât la primul, Andrei cu 20 lei mai puțin decât Dragoş, iar Vasile cu 20 lei mai puțin decât Andrei. La cele două concursuri ei au primit 780 lei.

a) Cât primeşte Dragoş la primul concurs?
b) Dacă împreună ar cumpăra 3 albume şi 2 cărți, le-ar mai rămâne 80 lei din suma primită, iar dacă ar cumpăra 2 albume şi 3 cărți, le-ar mai trebui 80 lei. Cât costă un album şi o carte?

Inst. Adrian Calotă, Rm. Vâlcea

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 2 ore şi 30 minute.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

"PITAGORA" – EDIȚIA A XIV-A

Proba individuală – 6 mai 2011

Clasa a IV-a

Subiectul 1

a) Aflaţi x din egalitatea:
$\{[(2007 + x) : 2008 + 2009] : 2010 + 2011\} : 2012 = 1$.

b) Determinaţi numerele naturale $\overline{ab}$ şi n ştiind că
$\overline{1ab} \cdot n + 2 \cdot \overline{1ab} = \overline{11ab}$

Înv. Valeriu Cîrstea, Rm. Vâlcea

Subiectul 2

Se consideră numerele naturale mai mici decât 788 care au cifra 5 în scrierea lor de exact două ori.

a) Aflaţi numerele.
b) Calculaţi suma lor.
c) Aflaţi câtul împărţirii celui mai mare număr la cel mai mic.

Înv. Adela Stoian, Rm. Vâlcea,
Înv. Georgeta Predescu, Rm. Vâlcea

Subiectul 3

Se consideră exercițiul:

$4 \cdot 15 + 24 : 4 + 2$

a) Rezolvați exercițiul.
b) Punând cel mult două paranteze în exercițiul dat, arătați că se pot obține rezultate a căror sumă este 348.

Înv. Maria Diaconu, Rm. Vâlcea

Subiectul 4

Andrei a ales pentru aniversarea zilei de naştere o sală cu cel puțin 20 locuri şi cel mult 30.

În fiecare fructieră a pus câte 12 mere şi 23 prune. După ce copiii au consumat câte 2 mere şi câte 4 prune, în fiecare fructieră au rămas 3 mere şi 5 prune.

Aflați câți prieteni au venit la aniversare şi câte fructe au fost.

Înv. Ana Burduază, Rm. Vâlcea
Înv. Constantina Dumitriu, Rm. Vâlcea

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 2 ore şi 30 minute.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

"PITAGORA" – EDIȚIA A XIV-A

Proba individuală – 6 mai 2011

Clasa a V-a

Subiectul 1

a) Care dintre următoarele numere este cel mai mare?

$$E_1 = \left[\left(2^3\right)^2\right]^4;\ E_2 = \left(2^3\right)^{2^4};\ E_3 = \left(2^{3^2}\right)^4;\ E_4 = \left(2^3\right)^{24};\ E_5 = 2^{3^{2^2}}$$

b) Dacă x, y, z sunt numere naturale cu proprietatea că $z \cdot y = 2011$ şi $x \cdot y + x \cdot z = 6036$ care va fi valoarea sumei $x + y + z$?

C.N.E.

Subiectul 2

a) Împărțind numerele 6965, 3806 şi 2564 la acelaşi număr natural n obținem resturile 35, 26 şi 44. Aflați cea mai mare valoare a numărului n.

Prof. Dumitru Acu, Sibiu.

b) Fie x şi y două numere naturale care verifică egalitatea:

$$5x + 7y = 2011$$

Arătați că $285 < x + y < 403$.

Prof. Constantin Saraolu, Rm. Vâlcea

Subiectul 3

Determinați numerele de patru cifre $\overline{abcd}$, scrise în baza de numerație 10, divizibile cu 5 şi pentru care

$$a + d = (b + c)^3.$$

Prof. Dumitru Acu, Sibiu

Subiectul 4

Fie numărul A=101001000100001……

a) Dacă A se termină cu cifra 1, iar cifra 1 apare scrisă de 2011 ori în A, de câte ori este scrisă cifra 0?
b) De câte ori apare cifra 0 în scrierea numărului A dacă acesta are 2011 cifre?

Prof. Marius Perianu, Slatina

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 2 ore şi 30 minute.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"PITAGORA" – EDIȚIA A XIV-A
Proba individuală – 6 mai 2011

Clasa a VI-a

Subiectul 1

a) Dacă $\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ şi $2x+3y+4z=108$, să se determine $S=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z}$.

b) Aflați valorile pe care le poate lua expresia:
$E=(-1)^m\cdot 5+(-1)^{n+1}\cdot 7-(-1)^{2n+1}\cdot 11$, unde $m,n\in\mathbb{N}$.

Prof. Gheorghe Barbu, Lăpuşata

Subiectul 2

a) Determinați $x\in\square$ pentru care valoarea fracției $\frac{2x-1}{x+3}$ este un pătrat perfect.

b) Să se arate că există $x\in\square$, pentru care numărul $\frac{2x^2+1}{x+3}$ este întreg şi cub perfect.

Prof. Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Subiectul 3

Se consideră unghiurile $\angle A_0OA_1$, $\angle A_1OA_2$, …., $\angle A_{n-1}OA_n$, ($n\in\mathbb{N}, n\geq 2$), cu interioarele disjuncte două câte două şi suma măsurilor 180°, astfel încât:

$m(\angle A_1OA_2)=2\cdot m(\angle A_0OA_1)$; $m(\angle A_2OA_3)=2\cdot m(\angle A_1OA_2)$;……; $m(\angle A_{n-1}OA_n)=2\cdot m(\angle A_{n-2}OA_{n-1})$

Să se determine n şi $m(\angle A_0OA_1)$, ştiind că este exprimată printr-un număr natural.

Prof. Marius Perianu, Slatina

Subiectul 4

Fie ΔABC. Măsurile unghiurilor sunt direct proporționale cu trei numere naturale consecutive. În exteriorul triunghiului se construieşte ΔABD echilateral. Bisectoarea unghiului $\angle ABC$ intersectează dreapta AD în punctul F. Se cere:

a) Aflați $m(\angle ABC)$.

b) Arătați că ΔABC nu poate fi obtuzunghic.

c) Ştiind că $\frac{m(\angle BAC)}{m(\angle ACB)}=\frac{3}{5}$, $AB=a\ cm$, $BC=b\ cm$, aflați perimetrul triunghiului BDF în funcție de a şi b.

Prof. Mariana Saraolu, Rm. Vâlcea

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore şi 30 minute.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

“PITAGORA” – EDIȚIA A XIV-A

Proba individuală – 6 mai 2011

Clasa a VII-a

<u>Subiectul 1</u>

a) Dacă $x, y \in \square$ şi $4x^2 + y^2 - 12xy - 4y + 13 = 0$, demonstrați că

i) $xy \geq 1$

ii) $\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - 2}} \in \square$

b) Aflați $a, b \in \square$ ştiind că $a\sqrt{3} - 2b + 13 = \left(a + \sqrt{3}\right)^2 + \left(b - \sqrt{3}\right)^2$.

Prof. Ileana Statie, Rm. Vâlcea,
Prof. Alexandru Statie, Rm. Vâlcea

<u>Subiectul 2</u>

Determinați forma generală a perechilor (x, y), $x, y \in \square$, pentru care $2x - 5y = 3$ şi $x + y \geq 19$.

În şirul perechilor (x, y) aflate, precizați prima şi a 50-a soluție.

Prof. Ghica Ion, Rm. Vâlcea

<u>Subiectul 3</u>

Pătratul ABCD are AB=12 cm, $P \in [BC]$, $Q \in [CD]$ astfel încât $CP = CQ = \dfrac{BC}{3}$.

a) Calculați aria triunghiului APQ.
b) Aflați distanța de la Q la dreapta AP.
c) Aflați $\sin \widehat{PAQ}$.

Prof. Emil Mitrache, Rm. Vâlcea

<u>Subiectul 4</u>

Fie $ABCD$ paralelogram cu $AB = 5cm$ şi $AD = 3\,cm$. Demonstrați că : $S_{ABCD} = 8cm^2 \Leftrightarrow m\left(\widehat{O}\right) = 45^\circ$, unde $AC \cap BD = \{O\}$.(S_{ABCD} reprezintă aria lui $ABCD$).

Prof. Bărăscu Constantin, Rm. Vâlcea

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 2 ore şi 30 minute.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

“PITAGORA” – EDIȚIA A XIV-A

Proba individuală – 6 mai 2011

Clasa a VIII-a

Subiectul 1

a) Arătați că ecuația $(m+1)x^2-(2m+3)x+m+2=0, unde\ m \in □ \setminus \{1\}$ are soluții reale și distincte.

b) Fie $E(x)=\sqrt{4^x+2^{x+1}+n}, n\in □$. Dacă $E(0)\in □$ și $E(1)\in □$ arătați că $E(x)\in □$, oricare ar fi $x\in □$.

Prof. Marius Mazilu, Rm. Vâlcea

Subiectul 2

Dacă $a,b,c\in(0,\infty)$, cu $(a+b)(b+c)(c+a)=1$ să se demonstreze că:

a) $a\cdot b\cdot c\le\frac{1}{8}$

b) $(a+b+c)^3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3\ge\frac{9^3}{64a^2b^2c^2}$.

Prof. Emil C. Popa, Sibiu

Subiectul 3

În tetraedrul $ABCD$ cu toate fețele triunghiuri ascuțitunghice în care $AB\perp CD$ și $AC\perp BD$ notăm cu H_1, H_2, H_3 și H_4 ortocentrele triunghiurilor DBC, DAC, DAB respectiv ABC. Arătați că:

a) AH_1, BH_2, CH_3, DH_4 și perpendicularele comune ale muchiilor opuse sunt concurente.

b) Cel puțin unul din rapoartele $\frac{HH_1}{HA},\frac{HH_2}{HB},\frac{HH_3}{HC},\frac{HH_4}{HD}$ este strict mai mare decât $\frac{1}{4}$, unde H este punctul de concurență de la a).

prof. Cecilia Diaconescu, Pitești
prof. Dumitru Dobre, Rm. Vâlcea

Subiectul 4

a) Volumul unui paralelipiped dreptunghic este egal cu 1 cm^3. Arătați că dacă mărim fiecare dimensiune a paralelipipedului cu 1 cm, atunci volumul paralelipipedului obținut este mai mare sau egal decât 8 cm^3.

b) Dacă volumul unui paralelipiped dreptunghic este egal cu n cm^3, unde $n>0$, și mărim fiecare dimensiune cu n cm, arătați că volumul noului paralelipiped se mărește de cel puțin (n^2+6n+1) ori.

Prof. Gheorghe Radu, Rm. Vâlcea

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 2 ore și 30 minute.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

"PITAGORA" – EDIȚIA A XIV-A

Proba colectivă – 7 mai 2011

Clasa a V-a

<u>Subiectul 1</u>

Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, cu a, b și c distincte, astfel încât $\overline{abb} = b \cdot \overline{cbc}$.

<u>Subiectul 2</u>

Aflați câte numere naturale de forma $\overline{ab}$, scrise în baza 10, verifică relația:

$$(2a+3b) \mid \overline{ab}.$$

<u>Subiectul 3</u>

a) Arătați că numărul $a = 0,25\left(5^{2012} - 9\right)$ este număr natural.

b) Comparați numerele A și B, unde:

$$A = 10\left(\frac{1}{1 \cdot 101} + \frac{1}{2 \cdot 102} + \frac{1}{3 \cdot 103} + ... + \frac{1}{10 \cdot 110}\right)$$

$$B = \frac{1}{1 \cdot 11} + \frac{1}{2 \cdot 12} + ... + \frac{1}{100 \cdot 110}$$

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 1 oră și 30 minute.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

"PITAGORA" – EDIȚIA A XIV-A

Proba colectivă – 7 mai 2011

Clasa a VI-a

Subiectul 1

a) Să se determine mulțimea: $A=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid |2x-1|+|2y+1|=2\}$.

b) Fie p probabilitatea ca, scriind un număr natural de două cifre distincte, acesta să fie pătrat perfect. Aflați numărul p și $n\in\mathbb{N}$ pentru care $\frac{1}{n+2}<\frac{p}{10}<\frac{1}{n}$.

Subiectul 2

Fie a și b numere naturale nenule.

Arătați că $(7a+4b,9a+5b)=(a,b)$, unde (x,y) reprezintă cel mai mare divizor comun al lui x și y.

Subiectul 3

În triunghiul isoscel ascuțitunghic cu $AB=AC$, notăm cu M mijlocul laturii $[AC]$, cu D piciorul înălțimii din C, $D\in[AB]$ și cu E punctul în care bisectoarea unghiului BAC intersectează latura $[BC]$.

Câte triunghiuri isoscel au vârfurile în trei dintre punctele A,B,C,D,E,M? (Justificați răspunsul).

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 1 oră și 30 minute.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

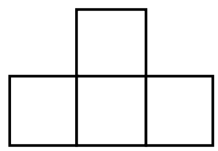
"PITAGORA" – EDIȚIA A XIV-A

Proba colectivă – 7 mai 2011

Clasa a VII-a

<u>Subiectul 1</u>

Să se afle numerele naturale n astfel încât o tablă de şah $n \times n$ poate fi acoperită cu piese de forma



care să nu se suprapună.

<u>Subiectul 2</u>

Numerele reale strict pozitive x, y, z verifică relația $x+y+z=2$. Demonstrați că $\frac{x-y}{xy+2z}+\frac{y-z}{yz+2x}+\frac{z-x}{zx+2y}=0$.

Subiectul 3

Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ are diagonalele perpendiculare dacă şi numai dacă $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 1 oră şi 30 minute.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

"PITAGORA" – EDIȚIA A XIV-A

Proba colectivă – 7 mai 2011

Clasa a VIII-a

Subiectul 1

Să se rezolve în $\square\times\square$ ecuația:

$$\frac{a}{(a+1)^2}+\frac{b}{(1+a+b)^2}=\frac{a+b}{2(1+a+b)}$$

Subiectul 2

Pe planul triunghiului ACD se ridică perpendiculara AB. Punctul $M\in(BD)$ astfel încât $BM=2\cdot MD$, punctul $N\in(AB)$ astfel încât $AN=2NB$ și punctul $P\in(BC)$ astfel încât $BP=2PC$. Știind că $AB=6, CD=9, AC=3\sqrt{3}$ și $AD=\frac{3\sqrt{21}}{2}$, calculați :

a) perimetrul triunghiului MNP.

b) $\cos\left((MNP),(ADC)\right)$

Subiectul 3

Fie $a,b,n\in N^*$, cu $a+b=2011$.

a) Să se arate că dacă numărul $A=\sqrt{n+a}+\sqrt{n-b}$ este natural , atunci el este număr prim.

b) Determinați n , cunoscând $a=36$.

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 1 oră și 30 minute.

BAREME
PROBA INDIVIDUALA

CLASA A III-A

Subiectul 1

Un număr natural n , de patru cifre, are suma cifrelor egală cu 35.
Aflați suma cifrelor numărului $n+1$.

Inst. Elena Maiug, Rm. Vâlcea

Barem de corectare

Fie $n=\overline{abcd}$, a,b,c,d - cifre, $a\neq 0$ ……………………………………………….1p
$a+b+c+d=35$ ……………………………………………………………………….1p
Cum $a\leq 9, b\leq 9, c\leq 9, d\leq 9 \Rightarrow a+b+c+d\leq 36$ ………………………...1p
Deoarece $a+b+c+d=35$, atunci 3 termeni sunt 9 şi un termen este 8…….1p
Numerele pot fi 9998, 9989, 9899, 8999……………………………………….1p

1. Dacă $n=9998 \Rightarrow n+1=9999 \Rightarrow S=36$, unde S e suma cifrelor lui $n+1$ ……1p
2. Dacă $n=9989 \Rightarrow n+1=9990 \Rightarrow S=27$ …………………………………….1p
3. Dacă $n=9899 \Rightarrow n+1=9900 \Rightarrow S=18$ ……………………………………..1p
4. Dacă $n=8999 \Rightarrow n+1=9000 \Rightarrow S=9$ ……………………………………….1p

Din oficiu 1p. Total 10p

Subiectul 2

a) Fiind date numerele 1, 2, 3, 4, 5 în această ordine, puneți semne de operații şi paranteze pentru a obține ca rezultate 2; 1; 4; 20; 3.

b) Schimbând ordinea numerelor date şi folosind paranteze, obțineți rezultatul calculelor numărul 4 în patru moduri.

Inst. Nicoleta Savu, Rm. Vâlcea
Inst. Emil Popa, Călimăneşti

Barem de corectare

a)

(1+2+3+4):5=2	1p
[(1+2):3+4]:5=1	1p
(1·2+3) ·4:5=4	1p
1+2-3+4·5=20	1p
1+(2·3+4):5=3	1p

b)

4·(1·2+3):5=4	1p
4·(5·1-2):3=4	1p
1·4·(5-2):3=4	1p
(5+3) ·2:4=4	1p

Din oficiu 1p. Total 10p

Subiectul 3

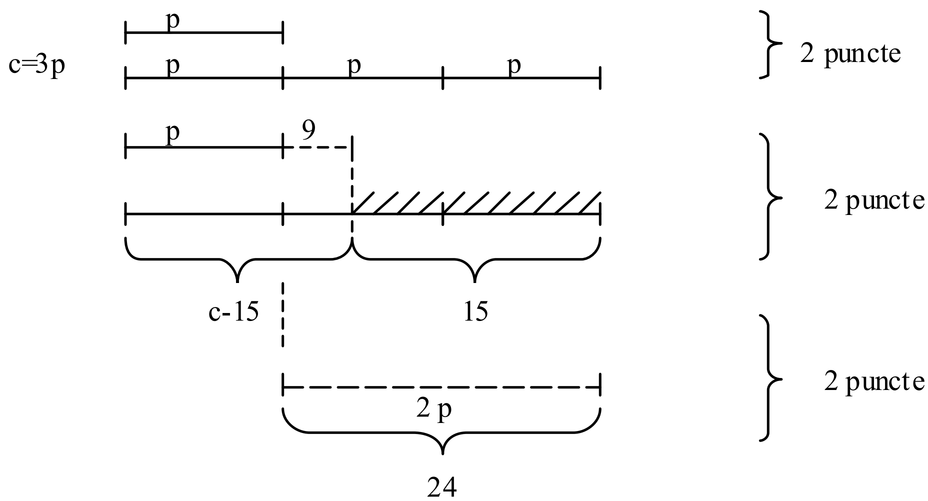
Într-un parc sunt părinți cu copii. Numărul copiilor este de trei ori mai mare decât numărul părinților. Dacă ar pleca 15 copii şi ar veni 9 părinți, atunci numărul copiilor ar fi egal cu numărul părinților. Câți copii şi câți părinți sunt în parc?

Înv. Maria Radu,
C.N.I. Matei Basarab, Rm. Vâlcea

<u>Barem de corectare</u>

$p =$ număr părinți, $c =$ număr copii.

Din oficiu 1p. Total 10p



$2p = 24$ ……………1 punct

$p = 12$ ………………1 punct

$c = 36$ ………………1 punct

Oficiu 1p. Total 10p

Subiectul 4

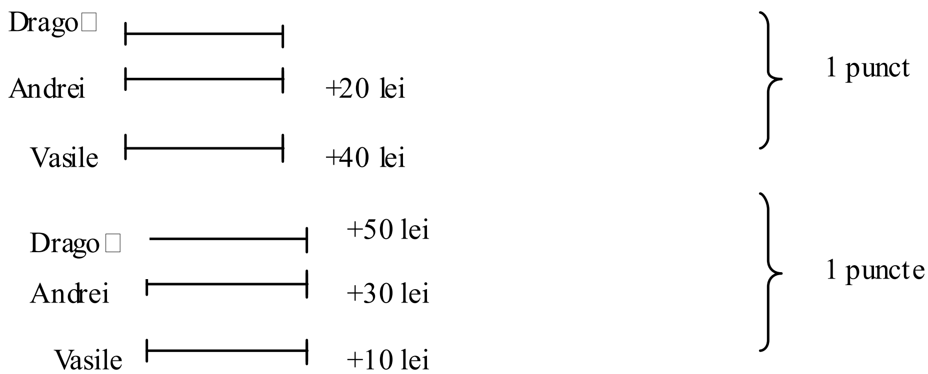
Trei prieteni participă la două concursuri de matematică. La primul Andrei primește cu 20 lei mai mult decât Dragoş, iar Vasile cu 20 lei mai mult decât Andrei. La al doilea concurs Dragoş primeşte cu 50 lei mai mult decât la primul, Andrei cu 20 lei mai puțin decât Dragoş, iar Vasile cu 20 lei mai puțin decât Andrei. La cele două concursuri ei au primit 780 lei.

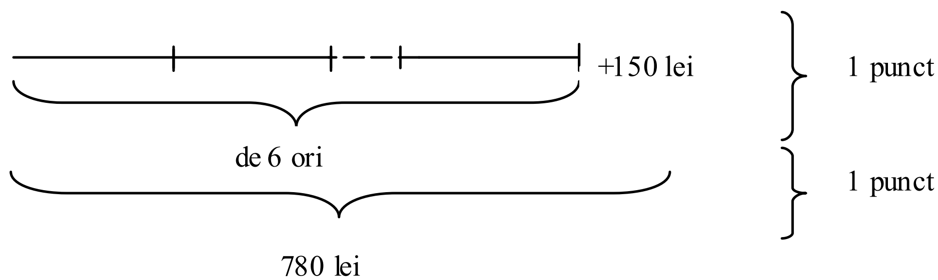
c) Cât primeşte Dragoş la primul concurs?

d) Dacă împreună ar cumpăra 3 albume şi 2 cărți, le-ar mai rămâne 80 lei din suma primită, iar dacă ar cumpăra 2 albume şi 3 cărți, le-ar mai trebui 80 lei. Cât costă un album şi o carte?

Inst. Adrian Calotă, Rm. Vâlcea

<u>Barem de corectare</u>





De 6 ori suma primită de Dragoș la primul concurs este 630 lei………..1p

630:6=105 lei……………………………………………………………..1p

b)

3 albume și 2 cărți costă 780 lei – 80 lei…………………………………..1p

2 albume și 3 cărți costă 780 lei + 80 lei…………………………………..1p

5 albume și 5 cărți costă 1560 lei ………………………………………..1p

1650:5=312 lei costă un album și o carte………………………………..1p

Oficiu 1p. Total 10p

Clasa a IV-a

Subiectul 1

a) Aflaţi x din egalitatea:
$\{[(2007+x):2008+2009]:2010+2011\}:2012=1$.

b) Determinaţi numerele naturale $\overline{ab}$ şi n ştiind că
$\overline{1ab}\cdot n+2\cdot\overline{1ab}=\overline{11ab}$

Înv. Valeriu Cîrstea, Rm. Vâlcea

Barem de corectare

a)

$\{[(2007+x):2008+2009]:2010+2011\}:2012=1|\cdot 2012$ ………….0,50p

$[(2007+x):2008+2009]:2010+2011=2012|-2011$ ……………..0,50p

$[(2007+x):2008+2009]:2010=1|\cdot 2010$ ………………………….0,50p

$(2007+x):2008+2009=2010|-2009$ ………………………………..0,50p

$(2007+x):2008+2009=1|\cdot 2008$ ……………………………………..0,50p

$2007+x=2008|-2007$, $x=1$ …………………………………………..0,50p

b) a,b cifre, $a\neq 0$. $\overline{11ab}=1000+\overline{1ab}$ …………………………………..1p

$\overline{1ab}\cdot n+2\cdot\overline{1ab}=1000+\overline{1ab}\ |-\overline{1ab}$
$\overline{1ab}\cdot n+\overline{1ab}=1000$ ………………………………………..1p

$\overline{1ab}\cdot(n+1)=1000$ ……………………………………………………..1p

$1000=100\cdot 10$
$1000=125\cdot 8$ ……………………………………………………………1p

I. $\overline{1ab}=100\Rightarrow a=0,b=0$. Dar $a\neq 0$ ……..…………………………1p

II $\overline{1ab}=125, n=8\Rightarrow \overline{ab}=25$ …………………………………………1p

Din oficiu 1p. Total 10p

Subiectul 2

Se consideră numerele naturale mai mici decât 788 care au cifra 5 în scrierea lor de exact două ori.

d) Afla□i numerele.
e) Calcula□i suma lor.
f) Afla□i câtul împăr□irii celui mai mare număr la cel mai mic.

Înv. Adela Stoian, Rm. Vâlcea,
Înv. Georgeta Predescu, Rm. Vâlcea

Barem de corectare

a)

I. Numere de forma $\overline{ab}$: 55 …………………………………………1p

Numere de forma $\overline{abc}$ ……………………………………………………1p

1. $\overline{55a}, a \in \{0,1,...9\}, a \neq 5$ ……………………………………………0,50p
   550, 551,552, 553, 554, 556, ….., 559…………………………0,50 p
2. $\overline{5a5}, a \in \{0,1,...9\}, a \neq 5$ ……………………………………………0,50p
   505, 515, 525, 535, 545, 565, ….., 595…………………………0,50 p
3. $\overline{a55}, a \in \{0,1,...7\}$ ……………………………………………………0,50p
   155, 255, 355, 455, 655, 755………………………………………0,50 p

b)

S_1 = 550+551+552+553+554+556+557+558+559, $S_1 = 550 \cdot 9 + 40$ ………1p

S_2 = 505+515+525+535+…..+595, $S_2 = 505 \cdot 9 + 400$ ………………………1p

$S_3 = \ 2300 + 6 \cdot 55$ …………………………………………………………………1p

$S = 55 + S_1 + S_2 + S_3,\ S = 12620$ ……………………………………………1p

c) Cel mai mare număr e 755, iar cel mai mic e 55. $755 : 55$ dă câtul 13……1p

Din oficiu 1p. Total 10p

Subiectul 3

Se consideră exercițiul:

$$4 \cdot 15 + 24 : 4 + 2$$

c) Rezolvați exercițiul.
d) Punând cel mult două paranteze în exercițiul dat, arătați că se pot obține rezultate a căror sumă este 348.

Înv. Maria Diaconu, Rm. Vâlcea

Barem de corectare

a) $4 \cdot 15 + 24 : 4 + 2 = 68$ 1p

b)

1. $4 \cdot (15 + 24 : 4 + 2) = 92$ 1p
2. $4 \cdot (15 + 24 : 4) + 2 = 88$ 1p
3. $4 \cdot (15 + 24) : 4 + 2 = 41$ 1p
4. $4 \cdot (15 + 24) : (4 + 2) = 26$ 1p
5. $(4 \cdot 15 + 24) : (4 + 2) = 14$ 1p
6. $(4 \cdot 15 + 24) : 4 + 2 = 23$ 1p
7. $4 \cdot 15 + 24 : (4 + 2) = 64$ 1p

$S = 92 + 88 + 41 + 26 + 14 + 23 + 64 = 348$ 1p

Din oficiu 1p. Total 10p

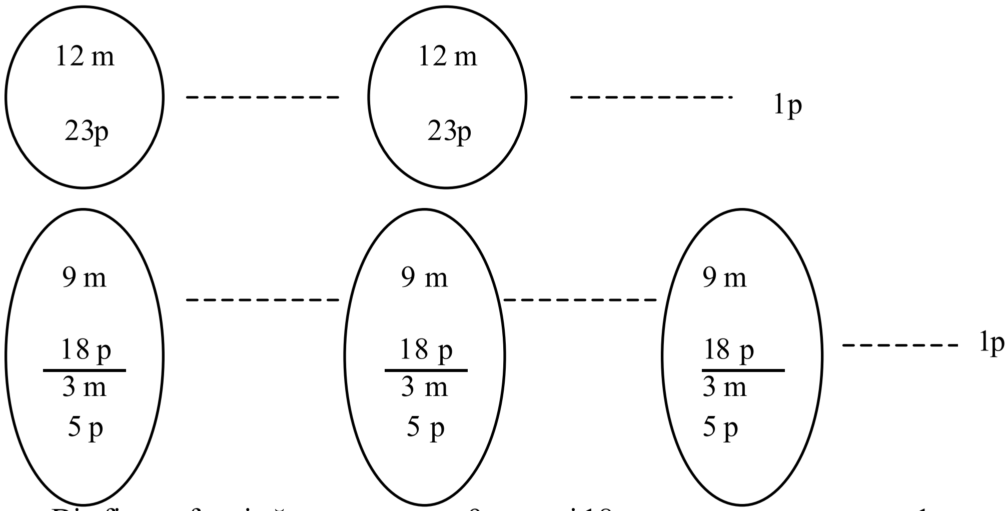
Subiectul 4

Andrei a ales pentru aniversarea zilei de naştere o sală cu cel puţin 20 locuri şi cel mult 30. În fiecare fructieră a pus câte 12 mere şi 23 prune. După ce copiii au consumat câte 2 mere şi câte 4 prune, în fiecare fructieră au rămas 3 mere şi 5 prune.

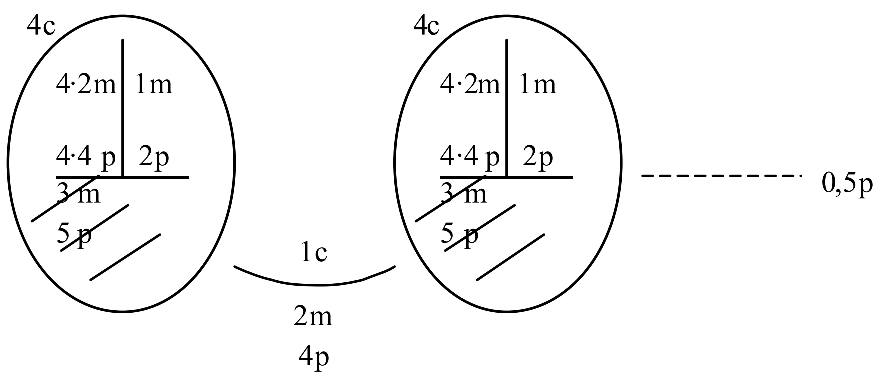
Aflaţi câţi prieteni au venit la aniversare şi câte fructe au fost.

Înv. Ana Burduază, Rm. Vâlcea
Înv. Constantina Dumitriu, Rm. Vâlcea

Barem de corectare



- Din fiecare fructieră s-au consumat 9 mere şi 18 prune……………………..1p
- $9 = 2 \cdot 4 + 1$
  $18 = 4 \cdot 4 + 2$
- 4 copii pot consuma din fiecare fructieră câte 2 mere şi 4 prune…………..1p
- mai rămân un măr şi 2 prune în fiecare fructieră…………………………..0,5p



- numărul fructierelor este număr par……………………………………0,5p
- număr copiilor este multiplu de 9……………………………………..0,5p
- cum $20 \le 27 \le 30 \Rightarrow$ 27 copii $\Rightarrow$ 26 prieteni…………………….0,5p

$27 : 9 = 3$

$3 \cdot 2 = 6$ *fructiere*

$6 \cdot 12 = 72$ *mere* ………………………………………………………………4 x 0,5 p

$6 \cdot 23 = 138$ *prune*

Rezultă 210 fructe……………………………………………………..0,5p

Din oficiu 1p. Total 10p

CLASA A V-A

Subiectul 1

a) Care dintre următoarele numere este cel mai mare?

$$E_1=\left[\left(2^3\right)^2\right]^4;\quad E_2=\left(2^3\right)^{2^4};\quad E_3=\left(2^{3^2}\right)^4;\quad E_4=\left(2^3\right)^{24};\quad E_5=2^{3^{2^2}}$$

b) Dacă x, y, z sunt numere naturale cu proprietatea că $z\cdot y=2011$ şi $x\cdot y+x\cdot z=6036$ care va fi valoarea sumei $x+y+z$?

C.N.E.

Barem de corectare

a)
$E_1=2^{24}$
$E_2=2^{48}$
$E_3=2^{36}$
$E_4=2^{72}$
$E_5=2^{81}$
$cel\ mai\ mare\ nr.este\ E_5$ ……………………………………………………… 6 x 0,50 p=3p

b) $x(y+z)=6036$ …………………………………………………………………1p
$2011=nr.\,prim, zy=2011\Rightarrow z=1, y=2011$ sau $z=2011, y=1$ …………………1p
1. $z=1, y=2011, y+z=2012$ ………………………………………………………1p
$x(y+z)=6036\Rightarrow x=3\Rightarrow x+y+z=2015$ ………………………………………...1p
2. $z=2011, y=1, z+y=2012$ ………………………………………………………1p
$x(y+z)=6036\Rightarrow x=3\Rightarrow x+y+z=2015$ ………………………………………...1p

Din oficiu 1p. Total 10p

Subiectul 2

a) Împărțind numerele 6965, 3806 şi 2564 la acelaşi număr natural n obținem resturile 35, 26 şi 44. Aflați cea mai mare valoare a numărului n .

Prof. Dumitru Acu, Sibiu.

b) Fie x şi y două numere naturale care verifică egalitatea:

$$5x+7y=2011$$

Arătați că $285 < x+y < 403$.

Prof. Constantin Saraolu, Rm. Vâlcea

Barem de corectare

a) $6965 = nc_1 + 35,\ 35 < n \quad 3806 = nc_2 + 26, 26 < n \quad 2564 = nc_3 + 44, 44 < n$, unde $n, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{N}$ ……………………………………………………………………..1,50p

Scăzând resturile obținem:

$nc_1 = 6930$, $nc_2 = 2780$, $nc_3 = 2520$ ……………………………………..1,50p

Din $n \mid 6930, n \mid 2780, n \mid 2520 \Rightarrow n \mid (6930, 2780, 2520)$ ………………………………..2p

$n \mid 630 \Rightarrow n_{\max} = 630$ …………………………………………………………………..1p

b) $5x+5y+2y=2011$ …………………………………………………………………0,50p

$5(x+y) \leq 2011 \ |:5$ ……………………………………………………………………0,50p

$x+y<403$ …………………………………………………………………………………0,50p

$7x+7y-2y=2011$ ……………………………………………………………………0,50p

$7(x+y) \geq 2011 \ |:7$ ……………………………………………………………………0,50p

$x+y>287$ …………………………………………………………………………………0,50p

Din oficiu 1p. Total 10p

Subiectul 3

Determinați numerele de patru cifre $\overline{abcd}$, scrise în baza de numerație 10, divizibile cu 5 şi pentru care

$$a + d = (b + c)^3.$$

Prof. Dumitru Acu, Sibiu

Barem de corectare

Din $\overline{abcd} \vdots 5$ rezultă $d \in \{0,5\}$ ……………………………………………………1p.

I. Dacă $d = 0 \Rightarrow a = (b+c)^3 \Rightarrow a$ cub perfect.

$1 \le a \le 9 \Rightarrow a = 1$ sau $a = 8$ ……………………………………………………1,5p

$a = 1 \Rightarrow b + c = 1 \Rightarrow b = 0$, $c = 1$ sau $b = 1, c = 0$. ………………………………1p

Obținem numerele 1100 şi 1010……………………………………………………0,50p

$a = 8 \Rightarrow b + c = 2 \Rightarrow b = 0, c = 2$, sau $b = 1, c = 1$ sau $b = 2$, $c = 0$. ……………1p

Avem soluțiile 8020, 8110, 8200……………………………………………………0,50p

II Dacă $d = 5$

$a + 5 = (b + c)^3$. ……………………………………………………………………0,50p

$6 \le a + 5 \le 14$, rezultă $b + c = 2$ şi $a + 5 = 8 \Rightarrow a = 3, b = 0, c = 2$ sau $b = 1, c = 1$

sau $b = 2$, $c = 0$ ……………………………………………………………………1p

Numerele: 3205, 3025 şi 3115……………………………………………………0,50p

Din oficiu 1p. Total 10p

Subiectul 4

Fie numărul A=101001000100001……

a) Dacă A se termină cu cifra 1, iar cifra 1 apare scrisă de 2011 ori în A, de câte ori este scrisă cifra 0?

b) De câte ori apare cifra 0 în scrierea numărului A dacă acesta are 2011 cifre?

Prof. Marius Perianu, Slatina

Barem de corectare

a) Între prima cifră 1 și a doua, cifra 0 apare o dată. Între prima cifră 1 și a treia, 0 apare de 1+2 ori……………………………………………………………………………………..2p

Între prima cifră 1 și a 2011-a , 0 aoare de
1+2+3+….+2010=2010·2011:2=2021055 ori…………………………………………...2p

Fie n numărul de cifre 1 care apar în scrierea lui A.

Acesta se poate scrie ca succesiunea secvențelor 1, 01, 001, 0001, …. $\underbrace{0...0}_{de\, n-1 ori}1$, urmate, eventual, de un număr mai mic decât n+1 de cifre 0………………………………………….1p

Atunci 1+2+3+…..+ n $\leq 2011 < 1+2+...+n+(n+1)$ …………………………….1p

$\Rightarrow n(n+1) \leq 4022 < (n+1)(n+2)$ ………………………………………………….1p

Cum $3906 = 62 \cdot 63 < 4022 < 63 \cdot 64 = 4032$ …………………………………………1p

obținem $n = 62$. Numărul cifrelor 0 este 2011-62=1949………………………….1p

Din oficiu 1p. Total 10p

Subiectul 1

a) Dacă $\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ și $2x+3y+4z=108$, să se determine $S=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z}$.

b) Aflați valorile pe care le poate lua expresia:
$E=(-1)^m\cdot 5+(-1)^{n+1}\cdot 7-(-1)^{2n+1}\cdot 11$, unde $m,n\in\mathbb{N}$.

Prof. Gheorghe Barbu, Lăpușata

Barem de corectare

a) $y=3x, z=4x$ ……………………………………………………………………1p

Din $2x+3y+4z=108\Rightarrow 27x=108\Rightarrow x=4$ ………………………………….1p

$y=12, z=16$ ………………………………………………………………………..1p

$x^3=64, y^2=144$. $S=\frac{1}{64}+\frac{1}{144}+\frac{1}{16}, S=\frac{49}{576}$ ………………………………1p

b) $2n+1$ e număr impar$\Rightarrow (-1)^{2n+1}=-1$. $E=(-1)^m\cdot 5+(-1)^{n+1}\cdot 7+11$ …….1p

I. m par, n par E=5-7+1, E=-1 …………………………………………………1p

II. m impar, n impar E=5-7+11, E=13…………………………………………1p

III. m par, n impar E=5+7+11, E=23……………………………………………1p

IV. m impar, n par E=5-7+11, E=-1.……………………………………………1p

Din oficiu 1p. Total 10p

Subiectul 2

a) Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care valoarea fracției $\frac{2x-1}{x+3}$ este un pătrat perfect.

b) Să se arate că există $x \in \mathbb{Z}$, pentru care numărul $\frac{2x^2+1}{x+3}$ este întreg și cub perfect.

Prof. Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Barem de corectare

a)

$\frac{2x-1}{x+3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (2x-1) \vdots (x+3) \Leftrightarrow x+3 \mid 2x-1$ ……………………..1p

dar $x+3 \mid 2x+6 \Rightarrow x+3 \mid 7 \Rightarrow x \in \{-2, -4, 4, -10\}$ ………………..1p

$x = -4 \Rightarrow \frac{-9}{-1} = 9\ p.p.$ ………………………………………………..1p

$x = 4 \Rightarrow \frac{8-1}{4+3} = 1 = p.p.$ ……………………………………………...1p

b) $\frac{2x^2+1}{x+3} \in \mathbb{Z}$ ……………………………………………………...0,50p

$\frac{2x^2+1}{x+3} = \frac{2\left(x^2-9\right)+19}{x+3} = 2\left(x-3\right) + \frac{19}{x+3}$ ………………………….1p

Cum $x \in \mathbb{Z}$, punem condiția ca $\frac{9}{x+3} \in \mathbb{Z}$ ………………………….0,50p

Din $\frac{9}{x+3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+3 \in \{1; -1; 19; -19\} \Rightarrow x \in \{-2; -4; 16; -22\}$ ………1p

Notăm $F = \frac{2x^2+1}{x+3}$

$x = -2 \Rightarrow F = 9 \Rightarrow F$ nu e cub perfect………………………………….0,50p

$x = -4 \Rightarrow F = -33 \Rightarrow F$ nu e cub perfect…………………………….0,50p

$x = 16 \Rightarrow F = 27 = 3^3 \Rightarrow F$ e cub perfect……………………………0,50p

$x = -22 \Rightarrow F = -51 \Rightarrow F$ nu e cub perfect…………………………….0,50p

Din oficiu 1p. Total 10p

Subiectul 3

Se consideră unghiurile $\angle A_0OA_1$, $\angle A_1OA_2$, …., $\angle A_{n-1}OA_n$, ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$), cu interioarele disjuncte două câte două şi suma măsurilor 180° , astfel încât:

$$m(\angle A_1OA_2) = 2 \cdot m(\angle A_0OA_1)$$

$$m(\angle A_2OA_3) = 2 \cdot m(\angle A_1OA_2)$$

………………………..

$$m(\angle A_{n-1}OA_n) = 2 \cdot m(\angle A_{n-2}OA_{n-1})$$

Să se determine n şi $m(\angle A_0OA_1)$, ştiind că este exprimată printr-un număr natural.

Prof. Marius Perianu, Slatina

Barem de corectare

Notăm $m(\angle A_0OA_1) = x^\circ$, $x \in \mathbb{N}^*$ şi obţinem:

$x + 2x + 2^2 x + ... + 2^{n-1} x = 180^\circ$ ……………………………………………………………1p

$\Rightarrow (2^n - 1)x = 180^\circ$ ………………………………………………………………………..2p

$\Rightarrow (2^n - 1) | 180^\circ$ ………………………………………………………………………...0,50p

Cum $(2^n - 1)$ e impar şi $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \Rightarrow 2^n - 1 \in \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$ …………………….1,50p

$\Rightarrow n \in \{2,4\}$ …………………………………………………………………………………...2p

I $n = 2 \Rightarrow x = 60$ ………………………………………………………………………….1p

II $n = 4 \Rightarrow x = 12$ …………………………………………………………………………1p

Din oficiu 1p. Total 10p

Subiectul 4

Fie ΔABC. Măsurile unghiurilor sunt direct proporționale cu trei numere naturale consecutive. În exteriorul triunghiului se construiește ΔABD echilateral. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ intersectează dreapta AD în punctul F. Se cere:

d) Aflați $m\left(\sphericalangle ABC\right)$.

e) Arătați că ΔABC nu poate fi obtuzunghic.

f) Știind că $\dfrac{m\left(\sphericalangle BAC\right)}{m\left(\sphericalangle ACB\right)}=\dfrac{3}{5}$, $AB=a\ cm$, $BC=b\ cm$, aflați perimetrul triunghiului BDF în funcție de a și b.

Barem de corectare

a) $\dfrac{m\left(\hat{A}\right)}{n-1}=\dfrac{m\left(\hat{B}\right)}{n}=\dfrac{m\left(\hat{C}\right)}{n+1}=\dfrac{180^\circ}{3n}=\dfrac{60^\circ}{n}, n\geq 2, n\in\mathbb{N}$ ……………………………….1p

$\dfrac{m\left(\hat{B}\right)}{n}=\dfrac{60^\circ}{n}\Rightarrow m\left(\hat{B}\right)=60^\circ$ ………………………………………………………….1p

b) Deoarece $n-1<n<n+1\Rightarrow m\left(\hat{A}\right)<m\left(\hat{B}\right)<m\left(\hat{C}\right)$……………………………….1p

$\dfrac{m\left(\hat{C}\right)}{n+1}=\dfrac{60^\circ}{n}\Rightarrow m\left(\hat{C}\right)=\dfrac{n+1}{n}\cdot 60^\circ$. Dar $\dfrac{n+1}{n}=1+\dfrac{1}{n}\leq 1+\dfrac{1}{2}$ $(n\geq 2)$

$\Rightarrow m\left(\hat{C}\right)\leq\dfrac{3}{2}\cdot 60^\circ \Rightarrow m\left(\hat{C}\right)\leq 90^\circ$………………………………………………………..1p

$\Rightarrow$ triunghiul nu poate fi obtuzunghic.

c) $m\left(\sphericalangle BAC\right)=3k, m\left(\sphericalangle ACB\right)=5k\Rightarrow k=15^\circ\Rightarrow m\left(\sphericalangle BAC\right)=45^\circ, m\left(\sphericalangle ACB\right)=75^\circ$ ………..1p

Fie $BF\cap AC=\{Q\}$.

Din ΔBDF, $m\left(\hat{B}\right)=90^\circ, m\left(\hat{F}\right)=30^\circ\Rightarrow DF=2BD\Rightarrow DF=2a$ ……………..1p

Din ΔBCQ isoscel $\Rightarrow BQ=BC=b$ …………………………………………….1p

Din ΔFAQ isoscel $\Rightarrow FA=FQ$. Dar $FA=a\Rightarrow FQ=a$ ………………………...1p

Deci $P_{\Delta BDF}=4a+b$ …………………………………………………………….1 p

Din oficiu 1p. Total 10p

CLASA a VII-a

Subiectul 1

a) Dacă $x,y\in\mathbb{R}$ şi $4x^2+y^2-12xy-4y+13=0$, demonstraţi că

i) $xy\geq 1$

ii) $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2-2}}\in\mathbb{N}$

b) Aflaţi $a,b\in\mathbb{Q}$ ştiind că $a\sqrt{3}-2b+13=\left(a+\sqrt{3}\right)^2+\left(b-\sqrt{3}\right)^2$.

Prof. Ileana Statie, Rm. Vâlcea,
Prof. Alexandru Statie, Rm. Vâlcea

Barem de corectare

a) $4x^2+y^2-12xy-4y+13=0$

$\left(2x-3\right)^2+\left(y-2\right)^2=0$ ……………………………………………………1p

$\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$ şi $y=2$ ……………………………………………………………..1p

i. $xy=3$ …………………………………………………………………………0,50p

ii. $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-2}=\dfrac{\frac{9}{4}+4}{\frac{9}{4}-2}=25.\ \sqrt{25}=5\in\mathbb{N}$ …………………………………………0,50p

b) $a\sqrt{3}-2b+13=a^2+2a\sqrt{3}+3+b^2-2b\sqrt{3}+3$ …………………………………1p

$\sqrt{3}\left(2b-a\right)=a^2+b^2+2b-7$ ………………………………………………………...1p

$a,b\in\mathbb{Q}\Rightarrow 2b-a=0, a^2+b^2+2b-7=0$ …………………………………………1p

$a=2b$ ………………………………………………………………………………..0,50p

$4b^2+b^2+2b-7=0$ ………………………………………………………………0,50p

$5b^2+2b-7=0$

$5b^2+2b-5-2=0$

$(b-1)(5b+7)=0$ ………………………………………………………………..1p

$b=1, b=-\dfrac{7}{5}$

I. $b=1\Rightarrow a=2$ …………………………………………………………………0,50p

II. $b=-\dfrac{7}{5}\Rightarrow a=-\dfrac{14}{5}$ ……………………………………………………………..0,50p

Din oficiu 1p. Total 10p

Subiectul 2

Determinați forma generală a perechilor (x,y), $x,y \in \mathbb{N}$, pentru care $2x-5y=3$ şi $x+y \geq 19$.

În şirul perechilor (x,y) aflate, precizați prima şi a 50-a soluție.

Prof. Ghica Ion, Rm. Vâlcea

<u>Barem de corectare</u>

Din $2x-5y=3 \Rightarrow x=2(y+1)+\dfrac{y-1}{2}$ ……………………………………………2p

$(x,y) \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{y-1}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow y=2k+1, k \in \mathbb{N}$ ……………………………………………1p

$\Rightarrow x=5k+4, k \in \mathbb{N}$ ……………………………………………………………1p

Din $x+y \geq 19 \Rightarrow 7k+15 \geq 19 \Rightarrow k \geq 2$ ……………………………………………2p

Forma generală este :

$(5k+4;2k+1), k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ ……………………………………………………1p

Pentru $k=2 \Rightarrow (x,y)=(14,5)$ ……………………………………………………1p

Pentru $k=51 \Rightarrow (x,y)=(259,103)$ ……………………………………………1p

Din oficiu 1p. Total 10p

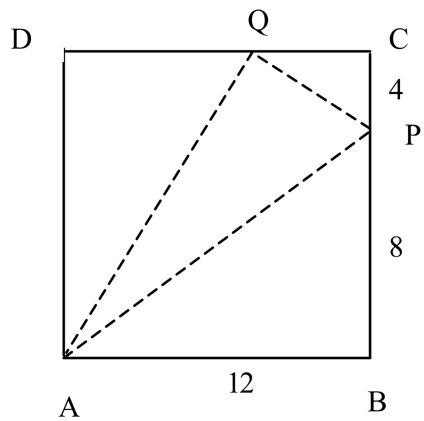
Subiectul 3

Pătratul ABCD are AB=12 cm, $P \in [BC]$, $Q \in [CD]$ astfel încât $CP = CQ = \frac{BC}{3}$.

a) Calculați aria triunghiului APQ.
b) Aflați distanța de la Q la dreapta AP.
c) Aflați $\sin \widehat{PAQ}$.

Prof. Emil Mitrache, Rm. Vâlcea

Barem de corectare



a) $A_{\triangle APQ} = A_{\square ABCD} - (A_1 + A_2 + A_3)$ ……………………………………………………1p

$A_1 = A_{ABP} = 48$

$A_2 = A_{CPQ} = 8$ ……………………………………………………………………………2p

$A_3 = A_{ADQ} = 48$

$A_{ABCD} = 144$

$A_{APQ} = 40$ ……………………………………………………………………………1p

b) $AP = 4\sqrt{13}$ (cu teorema lui Pitagora din $\triangle ABP$)……………………………1p

$A_{APQ} = \frac{AP \cdot QF}{2}, QF \perp AP$

……………………………………………………………1p

$QF = \frac{20}{\sqrt{13}}$

c) $A_{APQ} = \frac{AP \cdot AQ \cdot \sin \widehat{PAQ}}{2}$ …………………………………………………………1p

$AP = AQ = 4\sqrt{13}$ ……………………………………………………………………1p

$A_{APQ} = 40$

$\Rightarrow \sin \widehat{PAQ} = \frac{5}{13}$ ……………………………………………………………………1p

Din oficiu 1p. Total 10p

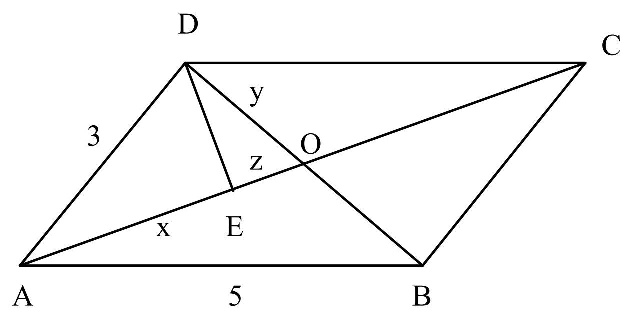
Subiectul 4

Fie $ABCD$ paralelogram cu $AB = 5cm$ şi $AD = 3\,cm$. Demonstraţi că :

$S_{ABCD} = 8cm^2 \Leftrightarrow m(\widehat{O}) = 45^\circ$, unde $AC \cap BD = \{O\}$.(S_{ABCD} reprezintă aria lui $ABCD$).

Prof. Bărăscu Constantin, Rm. Vâlcea

<u>Barem de corectare</u>



Fie $DE \perp AC$. Notăm : $OA = x, OB = y, OE = z$.

Din $\triangle DEA$ şi $\triangle DEO$ exprimăm DE^2

$DE^2 = b^2 - (x-z)^2 = a^2 - (x+z)^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 4xz$ 4p

$tgO = \dfrac{DE}{EO}$ 1p

$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ACD} = 2\dfrac{AC \cdot DE}{2} = 2xh = 2xztgO = \dfrac{a^2 - b^2}{2} tgO$ 2p

$S_{ABCD} = 8 \Leftrightarrow \dfrac{5^2 - 3^2}{2} tgO = 8 \Leftrightarrow tgO = 1 \Leftrightarrow m(\widehat{O}) = 45^\circ$ 2p

Din oficiu 1 p
Total 10p

Clasa a VIII-a

Subiectul 1

a) Arătați că ecuația $(m+1)x^2-(2m+3)x+m+2=0, unde\ m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ are soluții reale și distincte.

b) Fie $E(x)=\sqrt{4^x+2^{x+1}+n}, n \in \mathbb{N}$. Dacă $E(0) \in \mathbb{N}$ și $E(1) \in \mathbb{N}$ arătați că $E(x) \in \mathbb{N}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$.

Prof. Marius Mazilu, Rm. Vâlcea

Barem de corectare

a) $a=m+1,\ b=2m+3,\ c=m+2$ ……………………………………………………1p

$\Delta=1$ ………………………………………………………………………………...2p

$\Delta>0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ ……………………………………………………………1p

b)

$E(x)=\sqrt{4^x+2^{x+1}+n}$

$E(0) \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{3+n} \in \mathbb{N} \Rightarrow n+3=k^2$ ……………………………………………..1p

$E(1) \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{8+n} \in \mathbb{N} \Rightarrow n+8=p^2,\ k,p \in \mathbb{N}^*$ …………………………………..1p

$k^2+5=p^2 \Rightarrow p^2-k^2=5 \Rightarrow (p-k)(p+k)=5 \Rightarrow p=3 \Rightarrow n=1$ ……………….2p

$E(x)=\sqrt{(2^x+1)^2} \Rightarrow E(x)=2^x+1 \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ …………………………………….1p

Din oficiu 1p. Total 10p.

Subiectul 2

Dacă $a,b,c\in(0,\infty)$, cu $(a+b)(b+c)(c+a)=1$ să se demonstreze că:

a) $a\cdot b\cdot c\le\frac{1}{8}$

b) $(a+b+c)^3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3\ge\frac{9^3}{64a^2b^2c^2}$.

Prof. Emil C. Popa, Sibiu

Barem de corectare

1) $a>0, b>0, c>0$

$m_a\ge m_g$ ……………………………………………………………………………1p

$a+b\ge2\sqrt{ab}$, $b+c\ge2\sqrt{bc}$, $a+c\ge2\sqrt{ac}$ ………………………………………1,5p

$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$ ……………………………………………………1,5 p

$\Rightarrow 8abc\le1\Rightarrow abc\le\frac{1}{8}$ ………………………………………………………..1p

2)

$a+b+c=\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}\ge3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}\Rightarrow a+b+c\ge\frac{3}{2}$ (1) …….1,5p

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}+\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}+\frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}{2}=\frac{a+b}{2ab}+\frac{b+c}{2bc}+\frac{c+a}{2ca}$$

$m_a\ge m_g\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{3}{2\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$ (2)……………………………………………..1,5p

Din relațiile (1) și (2) prin înmulțire, obținem:

$(a+b+c)^3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3\ge\frac{9^3}{64a^2b^2c^2}$ ……………………………………………1p.

Din oficiu 1p. Total 10p

Subiectul 3

În tetraedrul $ABCD$ cu toate fețele triunghiuri ascuțitunghice în care $AB \perp CD$ şi $AC \perp BD$ notăm cu H_1, H_2, H_3 şi H_4 ortocentrele triunghiurilor DBC, DAC, DAB respectiv ABC. Arătați că:

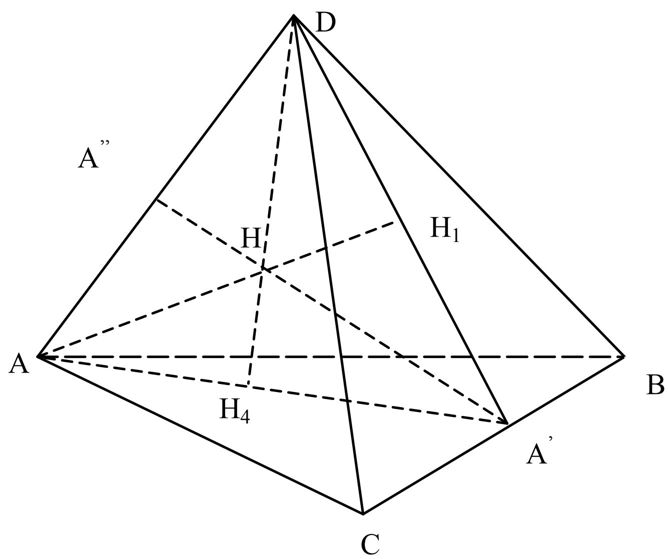
a) AH_1, BH_2, CH_3, DH_4 şi perpendicularele comune ale muchiilor opuse sunt concurente.

b) Cel puțin unul din rapoartele $\frac{HH_1}{HA}, \frac{HH_2}{HB}, \frac{HH_3}{HC}, \frac{HH_4}{HD}$ este strict mai mare decât $\frac{1}{4}$, unde H este punctul de concurență de la a).

prof. Cecilia Diaconescu, Piteşti

prof. Dumitru Dobre, Rm. Vâlcea

Barem de corectare



a) $BC \perp AD, BC \perp AA', AD \cap AA' = \{A\} \Rightarrow BC \perp DH_4 \Rightarrow DH_4 \perp BC$

Analog $DH_4 \perp AC \Rightarrow DH_4 \perp (ABC)$……………………………………………1p

Deci AH_1, BH_2, CH_3 □i DH_4 sunt înăl□imile tetraedrului.

$BC \perp (ADH_1),\ BC \perp (ADH_4),\ (ADH_1) \cap (ADH_4) = AD \Rightarrow (ADH_1)$ □i (ADH_4) sunt confundate $\Rightarrow AH_1 \cap DH_4 = \{H\}$ ……………………………………………..2p

În □DAA_1, AH_1 □i DH_4 sunt înăl□imi $\Rightarrow H$ e ortocentrul □DAA' $\Rightarrow A'H \perp BC$. Cum $HA' \perp BC \Rightarrow A'A''$ e perpendiculara comună a dreptelor AD □i BC ………..2p

b) $\frac{HH_4}{HD} > \frac{HH_4}{DH_4}$ ……………………………………………………………..1p

$\frac{HH_4}{DH_4} = \frac{V_{HABC}}{V_{DABC}} \Rightarrow \frac{HH_1}{AH_1} + \frac{HH_2}{BH_2} + \frac{HH_3}{CH_3} + \frac{HH_4}{DH_4} > 1$ ………………………………1p

Dacă fiecare raport ar fi $\leq \frac{1}{4}$ rezultă suma lor e ≤ 1 (fals) Rezultă cel pu□in un raport e $> \frac{1}{4}$ ..1p.

Din oficiu 1p. Total 10p

Subiectul 4

a) Volumul unui paralelipiped dreptunghic este egal cu 1 cm^3 . Arătați că dacă mărim fiecare dimensiune a paralelipipedului cu 1 cm, atunci volumul paralelipipedului obținut este mai mare sau egal decât 8 cm^3.

b) Dacă volumul unui paralelipiped dreptunghic este egal cu n cm^3, unde $n>0$, și mărim fiecare dimensiune cu n cm, arătați că volumul noului paralelipiped se mărește de cel puțin $\left(n^2+6n+1\right)$ ori.

Prof. Gheorghe Radu, Rm. Vâlcea

Barem de corectare

a) $V_1 = abc \Rightarrow abc = 1$ ……………………………………………………………1p

$V_2 = (a+1)(b+1)(c+1)$ ……………………………………………………………1p

Din $m_a \geq m_g$ obținem $a+1 \geq 2\sqrt{a}, b+1 \geq 2\sqrt{b}, c+1 \geq 2\sqrt{c}$ ……………………..1p

$\Rightarrow V_2 \geq 8\sqrt{abc}$. Cum $abc = 1 \Rightarrow V_2 \geq 8$ ……………………………………………..1p

b)

$V_1 = abc = n$, $V_2 = (a+n)(b+n)(c+n)$ ……………………………………………...1p

$a + \dfrac{1}{a} \geq 2 | \cdot n \Rightarrow an + bc \geq 2n,\ bn + ac \geq 2n,\ cn + ab \geq 2n$ …………………………1p

$\Rightarrow n\left(a+b+c\right) + ab + bc + ac \geq 6n | \cdot n$

$n^2\left(a+b+c\right) + n\left(ab+bc+ac\right) \geq 6n^2$ ……………………………………………..1p

$V_2 = abc + n\left(ab+bc+ac\right) + n^2\left(a+b+c\right) + n^3$ ………………………………….1p

$V_2 \geq n^3 + 6n^2 + n$

$V_2 \geq n\left(n^2+6n+1\right)$ ……………………………………………………………1p

$V_2 \geq V_1\left(n^2+6n+1\right)$

Din oficiu 1p. Total 10p