SIBIU **OLIMPIADA DE MATEMATICĂ** **FAZA LOCALĂ, 12.02.2011**

Clasa a V-a

1. Se dau numerele:

$$x = \{27 + [36 - (28 - 175 : 25) : 7] \cdot 4\} : 159;$$

$$y = \left(2011^{2012} : 2011^{2011} : 2012^{0}\right)^{0} - \left(125 \cdot 11111^{3} - 55555^{3}\right);$$

$$a = 3 + \left(3^{x}\right)^{2} + 3^{x+y} + \left(3^{y}\right)^{2} - 3^{x:y}.$$

(4p) a) Calculaţi numerele *x* şi *y*.

(3p) b) Arătaţi că numărul a^{2011} este cub perfect. *Liviu Ardelean*

2. Se consideră următorul tablou în care linia *n* conţine *n* numere:

1			
2	3		
4	5	6	
7	8	9	10

....

(3p) a) Calculaţi suma numerelor din primele 5 linii ale tabloului.

(4p) b) Determinaţi primul element de pe linia 100. *Monica Pau*

3. Numărul $x = \overline{ab}$ este format din primele două numere prime.

(3p) a) Arătaţi că *x* nu este pătrat perfect.

(4p) b) Dacă $n = a \cdot k + b,\ a < b,\ k \in N$, atunci $a^{n} + a^{2k}$ este pătrat perfect. *Cornel Ţichindelean*

4. (7p) Determinaţi mulţimile *A* şi *B*, ştiind că satisfac simultan condiţiile:

1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;

2) $A \cap B = \{3, 4\}$;

3) $A \cap \{5, 6, 7\} = \varnothing$;

4) $\{1, 2\} \cap B \neq \varnothing$.

Gazeta Matematică

Clasa a VI-a

1. (7p) Determinaţi numărul natural nenul *n*, ştiind că 2010 împărţit la 2*n* dă restul 10, 2011 împărţit la 3*n* dă restul 61 şi 2012 împărţit la 5*n* dă restul 12. *Viorica David*

2. (7p) Calculaţi suma: $S = 2 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \ldots + \frac{1025}{1024}$ *Gazeta Matematică*

3. Se dau punctele coliniare A_0, A_1, $A_2, \ldots,$ A_n, A_{n+1}, astfel încât $A_0A_1 = 1cm$, $A_1A_2 = 2011 \cdot A_0A_1$, $A_2A_3 = 2011 \cdot A_1A_2$, ... , $A_nA_{n+1} = 2011 \cdot A_{n-1}A_n$.

(3p) a) Calculaţi lungimea segmentului [*MN*], unde *M* este mijlocul segmentului [A_1A_2] şi *N* este mijlocul segmentului [A_2A_3].

(4p) b) Aflaţi *n* pentru care $2010 \cdot A_1A_{n+1} + 2011 \cdot A_0A_1 = 2011^{2012}$. *Monica Guita*

4. Unghiurile $\sphericalangle AOC$ şi $\sphericalangle COB$ sunt adiacente suplementare, iar punctele *C* şi *D* sunt de o parte şi de cealaltă a dreptei *AO*, astfel încât m($\sphericalangle COD$)=100° şi m($\sphericalangle BOD$)=3·m($\sphericalangle AOC$)<180°. Aflaţi:

(4p) a) Măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle COB$ şi $\sphericalangle BOD$.

(3p) b) Măsura unghiului format de bisectoarea $\sphericalangle AOD$ şi semidreapta opusă semidreptei [*OC*.

Doina Tatu

SIBIU **FAZA LOCALĂ, 13.02.2011**

Clasa a VII-a

1. (3p) a) Arătaţi că: $\frac{2^{n-1}}{(2^n+1)\cdot(2^{n+1}+1)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$.

(4p) b) Aflaţi numărul natural nenul n, astfel încât:

$$\frac{1}{3\cdot5}+\frac{2}{5\cdot9}+\frac{4}{9\cdot17}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{(2^n+1)\cdot(2^{n+1}+1)}=\frac{2^{2010}-1}{3\cdot(2^{2011}+1)}.$$

Gazeta Matematică

2. (3p) a) Comparaţi numerele reale: $a=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$ şi $b=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}$.

(4p) b) Se dă suma:

$S=1+2+3+4-5+6+7+8+9-10+\ldots+(5n-4)+(5n-3)+(5n-2)+(5n-1)-5n$.

Determinaţi numărul natural n pentru care $S=175$.

Simona Dumitrescu

3. (7p) Medianele $[CE]$ şi $[BD]$ ale triunghiului ABC $\left(m(\hat{A})=90^0\right)$ se intersectează în G. Dacă $BC=15cm$ şi $AG\cap ED=\{P\}$, calculaţi lungimile segmentelor AG şi PG.

***

4. $ABCD$ este un paralelogram, M şi N două puncte pe latura $[BC]$, astfel încât $BM=MN=NC$, iar P un punct pe latura $[CD]$, astfel încât $CP=PD$. Dacă $AM\cap CD=\{E\}$, $AN\cap CD=\{F\}$, $AP\cap BC=\{G\}$, demonstraţi că:

(3p) a) $NP\parallel MD$ şi $BP\parallel GF$.

(2p) b) GE nu este paralelă cu MD.

(2p) c) dreptele AN, BP şi DM sunt concurente într-un punct O.

Teodor Mărcuţ

Clasa a VIII-a

1. Se consideră expresia $E(a,b)=a^4+b^4+(a+b)^4$, unde $a,b\in\mathbb{N}$.

(4p) a) Demonstraţi că $2E(a,b)$ este pătrat perfect.

(3p) b) Arătaţi că $E(a,b)\geq 18a^2b^2$.

***

2. (7p) Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$, ştiind că $\sqrt{\overline{abc}}=\overline{ab}-\sqrt{c}$.

Gazeta Matematică

3. $ABCD$ este un tetraedru şi G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor DBC, DAC respectiv DAB.

(4p) a) Demonstraţi că $(G_1G_2G_3)\parallel(ABC)$.

(3p) b) Calculaţi raportul dintre ariile triunghiurilor $G_1G_2G_3$ şi ABC.

***

4. $ABCD$ este un paralelogram cu $m(\measuredangle A)=60^0, AD=6cm, DB\perp AD$ şi M este mijlocul laturii $[AB]$. În punctul P, $DB\cap CM=\{P\}$, se ridică perpendiculara PQ pe planul paralelogramului $ABCD$, astfel încât $PQ=2\sqrt{6}cm$.

(2p) a) Aflaţi aria paralelogramului $ABCD$.

(5p) b) Calculaţi distanţele de la punctul Q la punctul C, respectiv la dreapta BC

Gheorghe Floarea