BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VI-a

1. Determinaţi numerele naturale nenule a, b, $a<b$ pentru care are loc relaţia:

$$3\cdot[a,b]+5\cdot(a,b)=123,$$

unde $[a,b]=c.m.m.m.c.(a,b)$ şi $(a,b)=c.m.m.d.c.(a,b)$.

Laura Schroder, Câmpulung Moldovenesc

Soluţie. Folosim proprietatea $[a,b]\cdot(a,b)=a\cdot b$ şi avem: $3\cdot\dfrac{a\cdot b}{(a,b)}+5\cdot(a,b)=123$ (1). Notăm $(a,b)=d$, de unde rezultă că: $a=d\cdot x$, $b=d\cdot y$, $(x,y)=1$, $x,y\in\mathbb{N}^*$, $x<y$ (deoarece $a<b$). Înlocuind în relaţia (1) avem:
$3\cdot\dfrac{d\cdot x\cdot d\cdot y}{d}+5\cdot d=123\Leftrightarrow 3\cdot d\cdot x\cdot y+5\cdot d=123$ (2). Cum $123\,\vdots\,3$, $(3\cdot d\cdot x\cdot y)\,\vdots\,3$ rezultă că $(5\cdot d)\,\vdots\,3$, dar $(5,3)=1$, deci $d\,\vdots\,3\Rightarrow d=3\cdot k$, $k\in\mathbb{N}^*$. Înlocuind în relaţia (2) avem:
$3\cdot 3\cdot k\cdot x\cdot y+5\cdot 3\cdot k=123 \Leftrightarrow 3\cdot k\cdot x\cdot y+5\cdot k=41\Leftrightarrow k\cdot(3\cdot x\cdot y+5)=41$. Deci $41\,\vdots\,k$ şi cum $d<123\Rightarrow k<41$ avem $k=1\Rightarrow d=3$ şi $3\cdot x\cdot y+5=41$, de unde $3\cdot x\cdot y=36 \Leftrightarrow x\cdot y=12$.
Dar $(x,y)=1$, $x<y$, deci $(x,y)\in\{(1,12);(3,4)\}\Rightarrow(a,b)\in\{(3,36);(9,12)\}$.

Barem.

Cum $[a,b]\cdot(a,b)=a\cdot b$ avem: $3\cdot\dfrac{a\cdot b}{(a,b)}+5\cdot(a,b)=123$ (1)…………………………………………………………	1 p
Dacă $(a,b)=d \Rightarrow a=d\cdot x$, $b=d\cdot y$, $(x,y)=1$, $x,y\in\mathbb{N}^*$, $x<y$ (deoarece $a<b$)………………………....	1 p
Înlocuind în relaţia (1) avem: $3\cdot\dfrac{d\cdot x\cdot d\cdot y}{d}+5\cdot d=123\Leftrightarrow 3\cdot d\cdot x\cdot y+5\cdot d=123$ (2)…………………………...	1 p
Cum $123\,\vdots\,3$, $(3\cdot d\cdot x\cdot y)\,\vdots\,3 \Rightarrow (5\cdot d)\,\vdots\,3$, dar $(5,3)=1$, deci $d\,\vdots\,3\Rightarrow d=3\cdot k$, $k\in\mathbb{N}^*$…………………………	1 p
Din (2) avem: $3\cdot 3\cdot k\cdot x\cdot y+5\cdot 3\cdot k=123 \Leftrightarrow 3\cdot k\cdot x\cdot y+5\cdot k=41 \Leftrightarrow k\cdot(3\cdot x\cdot y+5)=41$. Deci $41\,\vdots\,k$ şi cum $d<123\Rightarrow k<41$ avem $k=1\Rightarrow d=3$ ………………………………………………………………………..	1 p
$3\cdot x\cdot y+5=41 \Leftrightarrow 3\cdot x\cdot y=36 \Leftrightarrow x\cdot y=12$. Dar $(x,y)=1$, $x<y \Rightarrow (x,y)\in\{(1,12);(3,4)\}$ ………………..	1 p
$(a,b)\in\{(3,36);(9,12)\}$ …………………………………………………………………………………..	1 p

2. Rezolvaţi în $\mathbb{Q}$ ecuaţia: $x\cdot 3^{2011}=\left(3^{2011}-1\right):\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+...+\dfrac{1}{3^{2010}}\right)$.

Ovidiu Ungureanu, Vatra Dornei

Soluţie. Notăm cu $S=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+...+\dfrac{1}{3^{2010}}$. Inmulţim S cu $\dfrac{1}{3}$ şi obţinem suma:
$\dfrac{1}{3}\cdot S=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+...+\dfrac{1}{3^{2010}}+\dfrac{1}{3^{2011}}$. Prin scăderea celor două sume avem: $S-\dfrac{1}{3}\cdot S=1-\dfrac{1}{3^{2011}}$.
Deci, $\dfrac{2}{3}\cdot S=\dfrac{3^{2011}-1}{3^{2011}} \Leftrightarrow S=\dfrac{3^{2011}-1}{2\cdot 3^{2010}}$. Ecuaţia devine: $x\cdot 3^{2011}=\left(3^{2011}-1\right)\cdot\dfrac{2\cdot 3^{2010}}{\left(3^{2011}-1\right)} \Leftrightarrow x=\dfrac{2\cdot 3^{2010}}{3^{2011}} \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$.

Barem.

$S=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+...+\dfrac{1}{3^{2010}}$; $S-\dfrac{1}{3}\cdot S=1-\dfrac{1}{3^{2011}}$ …………………………………………………………..	2 p
$S=\dfrac{3^{2011}-1}{2\cdot 3^{2010}}$ ………………………………………………………………………………………	2 p
$x\cdot 3^{2011}=\left(3^{2011}-1\right)\cdot\dfrac{2\cdot 3^{2010}}{\left(3^{2011}-1\right)} \Leftrightarrow x=\dfrac{2\cdot 3^{2010}}{3^{2011}}$ …………………………………………………………………	2 p
$x=\dfrac{2}{3}$ ……………………………………………………………………………………………...	1 p

3. Se dau unghiurile $\sphericalangle DAC$ şi $\sphericalangle BCA$ astfel încât punctele D şi B sunt de o parte şi de alta a dreptei AC, $\sphericalangle DAC\equiv\sphericalangle BCA$ şi $\sphericalangle DCA\equiv\sphericalangle BAC$. Fie punctele $M\in(DC)$, $N\in(AB)$ cu proprietatea $[DM]\equiv[BN]$, iar $MN\cap AC=\{O\}$.

a) Arătaţi că $[AM]\equiv[CN]$.

b) Demonstraţi că punctul O este mijlocul segmentelor $[MN]$ şi $[AC]$.

Tamara Brutaru, Suceava

Soluție. a) Analizăm ΔDAC și ΔBCA: $\left.\begin{array}{l}\sphericalangle DAC\equiv\sphericalangle BCA(\text{ip.})\\ [AC]-\text{latură comună}\\ \sphericalangle DCA\equiv\sphericalangle BAC(\text{ip.})\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta DAC\equiv\Delta BCA(\text{U.L.U.})\,(1)$

$\Rightarrow[DA]\equiv[BC](2)$; $\sphericalangle ADC\equiv\sphericalangle CBA(3)$; $[DC]\equiv[BA](4)$.

Analizăm ΔADM și ΔCBN: $\left.\begin{array}{l}[DA]\equiv[BC](2)\\ \sphericalangle ADC\equiv\sphericalangle CBA(3)\\ [DM]\equiv[BN](\text{ip.})\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta ADM\equiv\Delta CBN(\text{L.U.L.})\Rightarrow[AM]\equiv[CN]$.

b) Ținând cont de (4) și de ipoteză $\Rightarrow[DM]=[BN]$. Deci, $MC=DC-DM=AB-NB=AN\Rightarrow[MC]\equiv[AN](5)$.

Analizăm ΔAMN și ΔCNM: $\left.\begin{array}{l}[AM]\equiv[CN](a)\\ [AN]\equiv[MC](5)\\ [MN]-\text{latură comună}\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta AMN\equiv\Delta CNM(\text{L.L.L.})\Rightarrow\sphericalangle ANM\equiv\sphericalangle CMN(6)$.

Analizăm ΔANO și ΔCMO: $\left.\begin{array}{l}\sphericalangle ANO\equiv\sphericalangle CMO(6)\\ [MC]\equiv[AN](5)\\ \sphericalangle NAO\equiv\sphericalangle MCO(\text{ip.})\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta ANO\equiv\Delta CMO(\text{U.L.U.})\Rightarrow[MO]\equiv[ON]$ și $[AO]\equiv[OC]$.

Din $[MO]\equiv[ON]$ și $O\in[MN]\Rightarrow O$ mijlocul lui $[MN]$, iar din $[AO]\equiv[OC]$ și $O\in[AC]\Rightarrow O$ mijlocul lui $[AC]$.

Barem.

Figura	1p
a) ΔBCA: $\left.\begin{array}{l}\sphericalangle DAC\equiv\sphericalangle BCA(\text{ip.})\\ [AC]-\text{latură comună}\\ \sphericalangle DCA\equiv\sphericalangle BAC(\text{ip.})\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta DAC\equiv\Delta BCA(\text{U.L.U.})\,(1)$ $\Rightarrow[DA]\equiv[BC](2)$; $\sphericalangle ADC\equiv\sphericalangle CBA(3)$; $[DC]\equiv[BA](4)$	1 p
$\left.\begin{array}{l}[DA]\equiv[BC](2)\\ \sphericalangle ADC\equiv\sphericalangle CBA(3)\\ [DM]\equiv[BN](\text{ip.})\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta ADM\equiv\Delta CBN(\text{L.U.L.})\Rightarrow[AM]\equiv[CN]$	1 p
b) Ținând cont de (4) și de ipoteză $\Rightarrow[DM]=[BN]$. Deci, $MC=DC-DM=AB-NB=AN\Rightarrow[MC]\equiv[AN](5)$	1 p
$\left.\begin{array}{l}[AM]\equiv[CN](a)\\ [AN]\equiv[MC](5)\\ [MN]-\text{latură comună}\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta AMN\equiv\Delta CNM(\text{L.L.L.})\Rightarrow\sphericalangle ANM\equiv\sphericalangle CMN(6)$	1 p
$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle ANO\equiv\sphericalangle CMO(6)\\ [MC]\equiv[AN](5)\\ \sphericalangle NAO\equiv\sphericalangle MCO(\text{ip.})\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta ANO\equiv\Delta CMO(\text{U.L.U.})$	1 p
Din $[MO]\equiv[ON]$ și $O\in[MN]\Rightarrow O$ mijlocul lui $[MN]$ Din $[AO]\equiv[OC]$ și $O\in[AC]\Rightarrow O$ mijlocul lui $[AC]$	1 p

Notă:
Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.