

Olimpiada Națională de Matematică
etapa locală - 24 ianuarie 2009

Clasa a VII-a

1.

(4 p) a) Dacă $\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + \dots + 99\sqrt{3}}{x} = \frac{99}{\sqrt{3}}$, atunci să se calculeze \sqrt{x} cu două zecimale exacte.

(3 p) b) Să se calculeze suma: $\frac{\sqrt{2}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}} + \dots + \frac{\sqrt{2008}-\sqrt{2007}}{6\sqrt{111946}}$.

(7 p) 2. Determinați elementele mulțimii $M = \left\{ n \in \mathbb{Z} / \frac{5n-1}{n+1} \in \mathbb{Z} \right\}$.

GM 9/2008

3. Știind că numerele a și b sunt direct proporționale cu numerele 5 și 6, iar numerele b și c sunt invers proporționale cu numerele 3 și 4 arătați că:

(4 p) a) $a^2 + b^2$ nu este pătrat perfect;

(3 p) b) $b^2 + c^2$ este pătrat perfect.

4. Fie D un punct situat în interiorul triunghiului echilateral ABC astfel încât BDC este un triunghi isoscel cu $m(\sphericalangle BDC) = 80^\circ$, iar în interiorul triunghiului BDC considerăm un punct P astfel încât $m(\sphericalangle PBC) = 10^\circ$ și $m(\sphericalangle PCB) = 30^\circ$.

(4 p) a) Demonstrați că patrulaterul $ACPD$ este trapez isoscel.

(3 p) b) Dacă $O = AP \cap CD$, arătați că $BO \perp AC$.

Clasa a VIII-a

1.

(4 p) a) Dacă a și b sunt numere reale, arătați că: $a^2 - ab + b^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

(3 p) b) Demonstrați că: $\sqrt{x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2} + \sqrt{x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 - x_nx_1 + x_1^2} \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n$
oricare ar fi $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. În ce caz avem egalitate?

GM 7-8/2008

(7 p) 2. Pentru ce valori reale ale lui x și y are loc egalitatea: $\sqrt{x-196} + \sqrt{y-196} = \frac{x+y}{28}$?

(7 p) 3. Se considera fracția: $F(x) = \frac{x^2(x^2 + 10x + 25) + 12x(x+5) + 35}{(x+2)(x+3) + 1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$.

Arătați că $F(x) \in \mathbb{N}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$.

(7 p) 4. Fie O centrul pătratului $ABCD$ de latura a cm, iar M și N sunt mijloacele segmentelor DO respectiv BC . Pe perpendiculara în O pe planul pătratului se consideră punctul E astfel încât $EA = \frac{a\sqrt{5}}{5}$ cm. Calculați distanțele de la E la laturile triunghiului MAN .