Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 9 Martie 2013

CLASA a V-a

Problema 1. a) Calculaţi $5^3+6^3+7^3+11^3$;
b) Arătaţi că numărul 2015^{2014} poate fi scris ca o sumă de patru cuburi perfecte. GM

Problema 2. Determinaţi cifrele nenule $a,\ b,\ c$ astfel încât $\overline{ab}^2=\overline{cab}$.

Problema 3. Se consideră un număr natural A scris cu n cifre nenule, $n\geq 1$. Numărul B este obţinut din numărul A prin rearanjarea cifrelor acestuia. Ştiind că $A+B=10^n$ se cere:
a) Pentru $n=3$, daţi un exemplu de numere A şi B cu proprietatea din enunţ.
b) Arătaţi că n este număr impar.
c) Demonstraţi că în scrierea lui A există cel puţin o cifră egală cu 5.

Problema 4. Se consideră mulţimea $M=\{2^1,2^2,2^3,...,2^{15}\}$. a) Există trei mulţimi, $A,\ B,\ C$, nevide şi disjuncte două câte două astfel încât $A\cup B\cup C=M$, iar produsul elementelor fiecărei mulţimi să fie acelaşi?
b) Există trei mulţimi, $X,\ Y,\ Z$, nevide şi disjuncte două câte două astfel încât $X\cup Y\cup Z=M$, iar suma elementelor fiecărei mulţimi să fie aceeaşi?

CLASA a VI-a

Problema 1. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi punctul D pe semidreapta opusă semidreptei $(BC$, astfel încât $[DB]\equiv[BC]$. Considerăm punctul E în semiplanul determinat de dreapta AD ce nu conţine punctul B, astfel încât $\mathrm{d}(E,AB)=EA$, $\mathrm{d}(E,DC)=ED$ şi $EA=ED$, iar punctul F astfel ca $D\in(BF)$ şi $[FD]\equiv[BC]$.
a) Demonstraţi că $\Delta FDE\equiv\Delta BAE$. b) Arătaţi că $[EB$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AED}$. GM

Problema 2. Determinaţi câte numere de opt cifre conţin în scrierea lor secvenţa "2013". (un exemplu de astfel de număr este 31<u>2013</u>5)

Problema 3. a) Arătaţi că 30007 este număr compus.
b) Arătaţi că şirul: $37,\ 307,\ 3007,...,3\underbrace{00...0}_{de\ n\ ori}7,...$ conţine o infinitate de termeni care sunt numere compuse.

Problema 4. Se consideră numărul natural n, $n\geq 10$ şi mulţimea $A=\{1,2,3,...,3n\}$. Spunem că mulţimea nevidă X, $X\subset A$ are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă oricare ar fi $x\in X$ şi $y\in X$, $x>y$, numărul $x+y$ nu se divide cu numărul $x-y$.
a) Daţi un exemplu de mulţime X cu proprietate $\mathcal{P}$ care conţine numerele 4 şi 14 şi care are cel puţin trei elemente.
b) Demonstraţi că există cel puţin o mulţime cu proprietatea $\mathcal{P}$ care are exact n elemente.
c) Arătaţi că nu există o mulţime cu proprietatea $\mathcal{P}$ care să aibă n elemente şi să conţină numerele 4 şi 14.

CLASA a VII-a

Problema 1. Arătaţi că ecuaţia: $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1006}}+\dfrac{1}{\sqrt{2012-x}+\sqrt{1006}}=\dfrac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2012-x}}$
are 2013 soluţii în mulţimea numerelor întregi. *Gazeta Matematică*

Problema 2. Determinaţi perechile de numere reale (a,b) pentru care egalitatea $|ax+by|+|bx+ay|=2|x|+2|y|$ este adevărată pentru orice numere reale x şi y.

Problema 3. Pe laturile (AB) şi (AC) ale triunghiului ABC se consideră punctele M şi respectiv N astfel încât $\sphericalangle ABC\equiv\sphericalangle ANM$. Punctul D este simetricul punctului A faţă de B, iar P şi Q sunt mijloacele segmentelor $[MN]$ şi respectiv $[CD]$.
Demonstraţi că punctele $A,\ P$ şi Q sunt coliniare dacă şi numai dacă $AC=AB\sqrt{2}$.

Problema 4. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctul E în interiorul unghiului $\sphericalangle CAB$, astfel încât măsura unghiului $\sphericalangle BAE$ este de 15°, iar dreptele BE şi BD sunt perpendiculare. Demonstraţi că $AE=BD$.

CLASA a VIII-a

Problema 1. Determinaţi tripletele de numere întregi (x,y,z) cu proprietatea că $x^2+y^2+z^2=16(x+y+z)$.

Problema 2. Determinaţi toate numerele reale x pentru care numărul $a=\dfrac{2x+1}{x^2+2x+3}$ este întreg. GM

Problema 3. Fie prisma hexagonală regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu muchia bazei $AB=12$ şi înălţimea $AA'=12\sqrt{3}$. Notăm cu N mijlocul muchiei CC'.
a) Demonstraţi că dreptele BF' şi ND sunt perpendiculare. b) Calculaţi distanţa dintre dreptele BF' şi ND.

Problema 4. Considerăm numărul natural nenul fixat n. Determinaţi numerele naturale nenule $x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}$ cu proprietatea că $x_n\cdot x_{n+1}\leq 2(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.