

Concursul "Unirea"  
Focșani, 27 ianuarie 2007

Clasa a VIII-a

1. Să se găsească un număr natural și nenul care să poată fi scris ca produs de două numere naturale, unul cu 7 mai mare decât celălalt, dar și ca produs de două numere naturale, unul cu 3 mai mare decât celălalt.

2. Se da expresia  $E(x) = (x^2 - 2x + k)^2 + \frac{(x-1)^4}{(x^2-2x)^{2n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $k \in \mathbb{R}$

- Să se arate că  $E(-1)=E(3)$  și  $E(-3)=E(5)$ .
- Să se determine  $k \in \mathbb{Z}$ , astfel încât ecuația  $E(x) = k + 1$  să aibă cel puțin o soluție întregă.
- Să se determine  $k \in \mathbb{R}^*$ , astfel încât ecuația  $E(x) = k + 1$  să aibă exact o soluție reală.

3. Fie pătratul ABCD ( $AB=a$ ) și punctele S, T, P, astfel încât  $SA \perp (ABCD)$ ,  $SA = \frac{a}{2}$ ,  $CT \parallel DS$ ,  $CT = DS$ , planul (ABCD) separă punctele S și T și P, simetricul mijlocului segmentului (CD) față de dreapta AB.

- Să se calculeze  $d(T, (SDA))$  și  $d(T, AS)$
- Să se arate că  $AP \parallel (SBT)$

4. Fie patrulaterul ABCD în care  $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle CDB$ , iar  $AC \cap BD = \{O\}$ . Dacă  $VO \perp (ABCD)$ ,  $R \in \text{Int } \triangle OBC$ , iar perpendiculara în R pe planul (ABCD) intersectează planele (VBC) și (VAD) în S, respectiv T, să se arate că:

- $VA \perp VC \Leftrightarrow VB \perp VD$ ;
- Dreptele BC, OR, VS sunt concurente;
- Dacă  $OR \cap BC = \{M\}$ ,  $OR \cap AD = \{E\}$  și  $OM = OE$ , atunci  $RS + RT = 2VO$ .