OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 12.02.2011
CLASA A VI- A

SUBIECTUL I

a) Un număr natural A are suma cifrelor egală cu 101. Să se arate că A nu poate fi pătrat perfect.

G.M. nr. 1/2011

b) Fie șirul de numere naturale: 11, 111, 1111, 11111, …. . Demonstrați că nici un element al șirului nu poate fi pătrat perfect.

Prof. Burlan Adrian Eugen, Școala Anton Pann

Barem

a) Orice pătrat perfect e de forma 3k sau 3k + 1 ……………………..…1p
Restul împărțirii unui număr natural la 3 este egal cu restul împărțirii sumei cifrelor numărului la 3 …………………………………………..1p
Restul împărțirii lui A la 3 este egal cu restul împărțirii lui 101 la 3 și deci este este egal cu 2 $\Rightarrow$ A = 3k + 2 $\neq$ p.p. ……………………………….. 2p

b) Numere din șir sunt de forma 4k + 3 (din criteriul de divizibilitate cu 4)…2p
Pătratele perfecte sunt de forma 4k sau 4k+1 deci numerele din șir nu sunt pătrate perfecte …………………………………………………...………..1p

SUBIECTUL II

Se dau numerele $A = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{39\cdot 40}$ şi $B=\frac{1}{21\cdot 40}+\frac{1}{22\cdot 39}+...+\frac{1}{30\cdot 31}$. Arătaţi că numărul $\frac{A}{B}$ este numar prim.

prof. Constantinescu Dragoş, Gr. Şc. Ind. “General Magheru”

Rezolvare : Se arată mai întâi că $A=\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+...+\frac{1}{40}$ astfel :

$$A = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{39}-\frac{1}{40}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{40}-(\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{6}+...+\frac{2}{40})\Rightarrow$$

$$A=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{40}-(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{20})=\frac{1}{21}+...+\frac{1}{40}\text{ . }……………………………………2p.$$

Deci $\Rightarrow$ A = $\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+...+\frac{1}{40}=(\,^{40)}\frac{1}{21}+\,^{21)}\frac{1}{40})+(\,^{39)}\frac{1}{22}+\,^{22)}\frac{1}{39})+...+(\,^{31)}\frac{1}{30}+\,^{30)}\frac{1}{31})$ ……1p

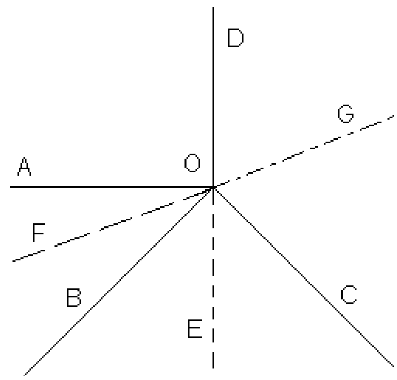
$\Rightarrow A=61\cdot(\frac{1}{21\cdot 40}+\frac{1}{22\cdot 39}+...+\frac{1}{30\cdot 31})\Rightarrow$ ………………………………………..……..2p

$A=61\cdot B\Rightarrow\frac{A}{B}=61$ număr prim……………….…………..……………..2p

SUBIECTUL III

Fie <AOB , <BOC, <COD, <DOA, unghiuri formate în jurul punctului O. Bisectoarea lui <BOC şi [OD sunt semidrepte opuse. Dacă [OD este perpendiculară pe [OA şi m(<AOB) = 45^0 , să se arate că:

a) OC este perpendiculară pe OB ;
b) Bisectoarele unghiurilor <AOB şi <DOC sunt semidrepte opuse.



Barem

a) 1p. Figura. Construim [OE – bisectoarea lui <BOC.

1p. Atunci m(<EOB) = 180^0 - [m (<AOB) + m (<AOD)] =180^0 - (90^0 + 45^0) = 45^0 ,

1p. deci m(<EOC) = 45^0 . Rezultă că m(<COB) = 90^0 şi OC $\perp$OD.

b) 1p. Avem m(< COD) = 180 – m(< EOC) = $180^0 - 45^0 = 135^0$

1p. Fie [OF bisectoarea <AOB şi [OG bisectoarea <COD.

2p. Atunci m (<FOG) = m (< GOC) + m (<COB) + m (<BOF) =

= $67^0\,30' + 90^0 + 22^0\,30' = 180^0$ deci unghiul GOF este un unghi cu laturile

în prelungire aşa că [OG şi [OF sunt semidrepte opuse.

SUBIECTUL IV

Să se arate că 23 divide $3^{23}+5^{23}+15^{23}$.

Prof.Cotoarba Cristian si Prof.Barbu Daniela

Soluţie.

Se aplică Mica teoremă a lui Fermat: $\forall a \in Z, p = prim, p \neq a \Rightarrow a^{p-1} = M_p + 1$. 2p

În cazul nostru avem $3^{23}+5^{23}+15^{23}=3\cdot 3^{22}+5\cdot 5^{22}+15\cdot 15^{22}=$ 2p
$3\cdot(M_{23}+1)+5\cdot(M_{23}+1)+15\cdot(M_{23}+1)==M_{23}+3+5+15=M_{23}$ 3p