

Olimpiada de matematică – faza locală

VASLUI
(12.02.2011)

Solutii

Clasa a VI-a

1. Un număr natural n împărțit la 7 dă restul 3 și împărțit la 8 dă restul 5.

- Aflați cel mai mic număr n care îndeplinește condițiile date.
- Ce rest se obține prin împărțirea lui n la 56?

Soluție:

- $n = 7a + 3$ și $n = 8b + 5$, a și $b \in \mathbb{N}$; $7a + 3 = 8b + 5 \Leftrightarrow 7a - 8b = 2$;
 $a = 6 \Rightarrow n = 45$.
- $n = 7a + 3 \Rightarrow 8n = 56a + 24$, $n = 8a + 5 \Rightarrow 7n = 56b + 35$
 $8n - 7n = 56a - 56b + 24 - 35 = 56a - 56b - 56 + 56 + 24 - 35$
 $n = 56(a - b - 1) + 45 \Rightarrow$ restul este 45.

2. Pe o dreaptă se iau punctele $O, A_1, A_2, \dots, A_{10}$ și simetricele lor față de punctul $O: B_1, B_2, \dots, B_{10}$, astfel încât $OA_1 = 1$ cm, $A_1A_2 = 2$ cm, $A_2A_3 = 2^2$ cm, $\dots, A_9A_{10} = 2^9$ cm.

- Comparați lungimea segmentului $[B_5A_{10}]$ cu lungimea segmentului $[B_8A_5]$.
- Dacă M este mijlocul segmentului $[OA_8]$, aflați k pentru care $M \in [A_kA_{k+1}]$

Soluție: $B_5A_{10} = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 + 1 + 2 + \dots + 2^9$

$B_8A_5 = 2^7 + \dots + 2^2 + 2 + 1 + 1 + 2 + 2^3 + 2^4$

Se observă că $B_5A_{10} > B_8A_5$ cu $2^8 + 2^9$; $OA_8 = 1 + 2 + \dots + 2^7 = 2^8 - 1 = 255$.

$OM = \frac{255}{2} = 127 \frac{1}{2}$ cm. Se observă că $OA_7 = 1 + 2 + \dots + 2^6 = 2^7 - 1 = 127 < 127 \frac{1}{2}$, de

unde rezultă că $M \in [A_7A_8]$.

3. Fie $\angle AOB$ și $\angle BOC$ adiacente suplementare, $[OX]$ bisectoarea $\angle BOC$ și semidreapta $[OY]$ opusă semidreptei $[OX]$. Știind că $m(\angle BOX)$ este mai mică decât măsura complementului acestuia de trei ori, să se determine $m(\angle YOY)$ și $m(\angle YOC)$.

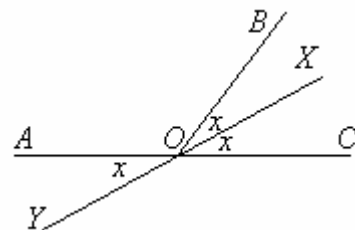
Soluție: Dacă $m(\angle BOX) = x = m(\angle XOC) = m(\angle AOY)$.

Complementul $\angle BOX$ are măsura $3x$, de unde

$x + 3x = 90^\circ$ și $m(\angle BOX) = 22^\circ 30'$.

Astfel $m(\angle AOB) = 135^\circ$,

$m(\angle YOY) = 157^\circ 30'$, $m(\angle YOC) = 157^\circ 30'$.



4. Determinați numerele naturale \overline{abc} știind că $11a - 8b - 4c = 0$.

GM 11-2010

Soluție: Din relația dată rezultă că $11a : 4$, de unde $a \in \{4; 8\}$.

Dacă $a = 4 \Rightarrow 11 = 2b + c$, $\overline{bc} \in \{19; 27; 35; 43; 51\}$,

deci $\overline{abc} \in \{419; 427; 435; 443; 451\}$

Dacă $a = 8 \Rightarrow 22 = 2b + c$, $\overline{bc} \in \{78; 86; 94\}$, deci $\overline{abc} \in \{878; 886; 894\}$

www.mategl.com