Inspectoratul Şcolar al Judeţului Vâlcea

Olimpiada de Matematică
Faza locală, 17 februarie 2007
Clasa a VIII-a

Subiectul I

a) Calculaţi $1{,}(3) \cdot (\sqrt{2} - 1) - 1{,}(3) \cdot \dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3}(1 - \sqrt{2})$.

b) Se ştie că exact unul dintre numerele reale x, y şi z este iraţional, iar numărul $N = xy + xz + yz$ este raţional. Demonstraţi că $N \leq 0$.

Subiectul II

Într-un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ se cunosc muchiile $AB = 2\sqrt{3}$ cm, $BC = 2\sqrt{6}$ cm şi $AA' = 3\sqrt{2}$ cm. Punctele M şi N sunt mijloacele muchiilor $[B'C']$, respectiv $[A'D']$.

a) Determinaţi măsura unghiului dintre planele (AMB) şi (CDN).

b) Demonstraţi că planele $(AA'M)$ şi $(CC'N)$ sunt paralele.

c) Determinaţi măsura unghiului dintre dreptele AM şi CN.

Subiectul III

Se consideră în spaţiu punctele A, B, C, D astfel încât $AC = BD = 2$ şi $AB = BC = CD = DA = \sqrt{2}$. Arătaţi că punctele sunt coplanare.

Subiectul IV

Numerele reale pozitive a şi b verifică relaţia $a + b + ab = 3$.

a) Verificaţi că, dacă $a = 2$, atunci $a + b > 2 > \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

b) Demonstraţi că $a + b \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, pentru orice a, b.

Fiecare subiect se notează de la 1 la 10. Timp de lucru: 3 ore