

# Olimpiada Națională de Matematică 2007

Etapa finală, Pitești, 11 aprilie 2007

## CLASA A VIII-A

**Subiectul 1.** Să se arate că numărul  $10^{10}$  nu poate fi scris ca produsul a două numere naturale a căror reprezentare zecimală să nu conțină cifra 0.

**Subiectul 2.** Într-o clădire sunt 6018 birouri în 2007 camere, iar în fiecare cameră se află măcar un birou. Orice cameră poate fi golită distribuind birourile în celelalte camere astfel încât în acestea să fie un număr egal de birouri. Să se determine modurile în care sunt dispuse birourile în clădire.

**Subiectul 3.** a) Într-un triunghi  $MNP$ , lungimile laturilor sunt mai mici decât 2. Arătați că lungimea înălțimii corespunzătoare laturii  $MN$  este mai mică

decât  $\sqrt{4 - \frac{MN^2}{4}}$ .

b) Într-un tetraedru  $ABCD$ , cel puțin 5 muchii au lungimi mai mici decât 2. Arătați că volumul tetraedrului este mai mic decât 1.

**Subiectul 4.** Fie  $ABCD$  un tetraedru. Demonstrați că dacă un punct  $M$  din spațiu satisface relația

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + CD^2 &= MB^2 + MC^2 + DA^2 = \\ &= MC^2 + MD^2 + AB^2 = MD^2 + MA^2 + BC^2, \end{aligned}$$

atunci aparține perpendicularei comune a dreptelor  $AC$  și  $BD$ .