Concursul de matematică „NICOLAE COCULESCU“ 2009
Soluțiile problemelor date la concurs
Clasa a VI-a

1. Numărul căutat este tocmai 2010. Să arătăm mai întâi că n este par. Presupunând contrariul, înseamnă că toţi divizorii d_i sunt impari, de unde rezultă că $3d_4^2$ este număr impar iar $67+d_2+2d_3$ număr par, absurd! Deci n este par şi cu necesitate $d_2=2$. Atunci $3d_4^2=69+2d_3$, de unde reiese mai departe că $3 \mid d_3$ şi deci $d_3=3$. Atunci $d_4=5$. Ţinând cont de faptul că $67 \mid n$ şi că n are exact 16 divizori rezultă că $n=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67=2010$.

2. a) Fie n numărul căutat; atunci există numerele $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{N}$ astfel încât

$$\begin{cases} n=3c_1+2\\ n=5c_2+2\\ n=7c_3+2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n-2=3c_1\\ n-2=5c_2\\ n-2=7c_3\end{cases} \Rightarrow [3,5,7]\mid n-2 \Rightarrow 105\mid n-2,$$

deci există $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $n-2=105k$, adică $n=105k+2$. Căutăm cel mai mic număr $k\in\mathbb{N}$ pentru care $17\mid n$; prin încercări, obţinem $k=5$, pentru care $n=527$.

b) Notăm $S_1=2^2+4^4+6^6+...+2008^{2008}$ şi $S_2=1^1+3^3+5^5+...+2009^{2009}$; evident, $S_1 \vdots 4$. Deoarece

$$\begin{aligned} S_2 &= 1+\left[(4-1)^3+(4+1)^5\right]+\left[(8-1)^7+(8+1)^9\right]+...+\left[(2008-1)^{2007}+(2008+1)^{2009}\right]=\\ &= 1+(\mathcal{M}_4-1+\mathcal{M}_4+1)+(\mathcal{M}_4-1+\mathcal{M}_4+1)+...+(\mathcal{M}_4-1+\mathcal{M}_4+1)=\mathcal{M}_4+1,\end{aligned}$$

rezultă că $S_1+S_2=\mathcal{M}_4+1$, deci restul împărţirii numărului S la 4 este 1.

3. a) Dintre trei numere consecutive, cel puţin unul este par, şi exact unul este divizibil cu 3. Ca urmare, $6\mid n(n+1)(n+2)$, deci $T_n\in\mathbb{N}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Dacă $334\mid T_n$, atunci există $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}=334k$, de unde rezultă că

$$n(n+1)(n+2)=2004k=2^2\cdot 3\cdot 167\cdot k.$$

Cum $167\mid n(n+1)(n+2)$, rezultă $167\mid n$ sau $167\mid n+1$ sau $167\mid n+2$. Pentru a obţine cea mai mică valoare posibilă a lui n, vom analiza situaţiile:
- $n=167$ − în care obţinem $167\cdot 168\cdot 169=2^2\cdot 3\cdot 167\cdot k$, de unde $k=2366$.
- $n+1=167$ − în care obţinem $n=166$ şi $166\cdot 167\cdot 168=2^2\cdot 3\cdot 167\cdot k$, de unde $k=2324$.
- $n+2=167$ − în care obţinem $n=165$ şi $165\cdot 166\cdot 167=2^2\cdot 3\cdot 167\cdot k$, care nu are soluţii $k\in\mathbb{N}$.

În consecinţă, cel mai mic număr *tetraedral* divizibil cu 334 este $T_{166}=334\cdot 2324=776\,216$.

4. Întrucât $A_1A_2<A_1A_3<A_1A_4<...<A_1A_{100}$ şi $A_2A_3<A_2A_4<...<A_2A_{100}<A_1A_{100}$, rezultă că $A_2A_3=A_1A_2$, $A_2A_4=A_1A_3$, ..., $A_2A_{100}=A_1A_{99}$. În general, pentru orice $k=\overline{2,99}$, avem $A_1A_k=A_2A_{k+1}$, de unde rezultă că $A_1A_2+A_2A_k=A_2A_k+A_kA_{k+1}$, deci $A_1A_2=A_kA_{k+1}$. Ca urmare, $A_1A_2=A_2A_3=...=A_{99}A_{100}\overset{not}{=}x$.

Fie M este mijlocul segmentului $[A_jA_k]$, unde $1\le j<k\le 100$. Atunci avem:

$$[MA_j]\equiv[MA_k]\Rightarrow A_1M-A_1A_j=A_1A_k-A_1M\Rightarrow 2A_1M=A_1A_j+A_1A_k\Rightarrow A_1M=\frac{A_1A_j+A_1A_k}{2}.$$

Ca urmare,

$$A_1M=\frac{(A_1A_2+A_2A_3+...+A_{j-1}A_j)+(A_1A_2+A_2A_3+...+A_{k-1}A_k)}{2}=\frac{(j-1)x+(k-1)x}{2}=\frac{k+j}{2}\cdot x-x.$$

Dacă $1\le j<k\le 100$, suma $k+j$ ia 197 de valori distincte (de la 3 la 199), deci $A_1M\in\left\{\dfrac{x}{2},\dfrac{2x}{2},...,\dfrac{197x}{2}\right\}$.

Astfel, mulţimea $\mathcal{M}$ a mijloacelor segmentelor cu capetele în punctele A_k, $k=\overline{1,100}$, cuprinde 197 de elemente, pe care le vom nota M_1, M_2, ..., M_{197}, în ordine, dinspre A_1 spre A_{100}. Deoarece distanţele dintre orice două puncte consecutive din $\mathcal{M}$ sunt egale, şi anume cu $\frac{x}{2}$, mulţimea distanţelor dintre punctele lui $\mathcal{M}$ conţine doar multipli de $\frac{x}{2}$. Cum distanţa minimă dintre două puncte din $\mathcal{M}$ este $\frac{x}{2}$, iar cea maximă este $M_1M_{197} = 196 \cdot \frac{x}{2}$, rezultă că mulţimea distanţelor dintre punctele din $\mathcal{M}$ are 196 de elemente.