Concursul de matematică „NICOLAE COCULESCU“ 2008

EDIŢIA a V-a SLATINA – 28 – 29 noiembrie 2008

Clasa a IV-a

1. a) Câte semne „+“ sunt în egalitatea $3 + 3 + 3 + ... + 3 = 213$?
b) Numerele naturale a, b, c sunt consecutive, iar produsul lor este 990. Aflaţi numărul b.
c) Scrieţi numerele naturale a, b, c şi d în ordine descrescătoare, ştiind că

$$a - 8 = b + 7 = c - 7 = d + 8.$$

2. Calculaţi:
a) $99996 : 3$.
b) $(1\,000\,000 - 4) : 3$.
c) $\left(\underbrace{1\,00...0}_{100 \text{ cifre de } 0} - 4\right) : 3$.

3. Cristi şi Mircea sunt prieteni. Mircea are o bicicletă. Dacă Cristi îi dă lui Mircea 2 ciocolate, atunci Mircea îi împrumută bicicleta lui Cristi timp de 3 ore. Dacă Cristi îi dă lui Mircea 28 de caramele, atunci Mircea îi împrumută bicicleta lui Cristi timp de 2 ore. Aflaţi pentru cât timp va primi Cristi bicicleta lui Mircea în cazul în care Cristi îi oferă lui Mircea o ciocolată şi 7 caramele.

4. Fie $N = 123456789101112...$ (se "lipesc" numerele naturale în ordine crescătoare începând de la 1). Care este cifra de pe poziţia 20008?

Clasa a V-a

1. Să se determine numerele naturale $\overline{abc}$ cu proprietatea $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$. *Florian Dumitrel*

2. Suma a 10 numere naturale este 2008. Împărţind fiecare dintre aceste numere la numărul natural n, obţinem resturi egale cu 2 sau cu 3. Suma tuturor acestor resturi este egală cu 27.
a) Câte resturi, dintre cele 10, sunt egale cu 2?
b) Determinaţi cel mai mic număr n care satisface condiţiile din enunţ. *Florica Banu*

3. Mulţimea $A = \{a, b, c, d, e\}$ are următoarele proprietăţi:
a) Media aritmetică a elementelor mulţimii A este egală cu 2008.
b) Dacă eliminăm cel mai mic element al mulţimii A, media aritmetică a elementelor rămase este 2010.
c) Dacă eliminăm cel mai mare element al mulţimii A, media aritmetică a elementelor rămase este 2006.
Determinaţi numărul de mulţimi A care au aceste proprietăţi.
Mircea Fianu

4. O pereche de numere naturale (m, n) se numeşte *interesantă* dacă atunci când calculăm suma $m + n$ nu au loc treceri peste ordin. De exemplu: o pereche *interesantă* cu suma 76 este $(22, 54)$ iar o pereche cu suma 76 care nu este *interesantă* este $(49, 27)$.
Să se calculeze numărul perechilor *interesante* cu suma 2793. *Marius Perianu*

Clasa a VI-a

1. a) Să se determine care pot fi ultimele două cifre ale sumei a 75 de numere naturale consecutive.
b) Patru numere naturale nenule au proprietatea că media aritmetică a oricăror trei este divizibilă cu al patrulea. Să se demonstreze că numerele sunt egale. *Costel Anghel, Marius Perianu*

2. Determinaţi cel mai mic număr natural n cu proprietatea că suma resturilor obţinute prin împărţirea la 10, 11, 12, ..., 19 este egală cu 135. *Emil Ciolan*

3. Fie $a = 2008! + 2007! + ... + 3! + 2!$, unde pentru $n \in \mathbb{N}^*$ am notat $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ şi $\overline{a_1 a_2 a_3 ... a_p}$ reprezentarea lui a în baza 10. Dacă $s = \overline{a_1 a_2} + \overline{a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6} + ...$ (ultimul termen fiind format din una sau două cifre), să se arate că a şi s nu sunt pătrate perfecte. *Cătălin Amza*

4. Pe o dreaptă d se consideră punctele A_1, A_2, A_3, ..., A_{45}, $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = ... = A_{44}A_{45} = 1$.
Să se arate că oricum am alege 10 puncte din mulţimea $\{A_1, A_2, A_3, ..., A_{45}\}$, există printre acestea 4, notate M, N, P, Q, astfel încât segmentele $[MN]$ şi $[PQ]$ să aibă acelaşi mijloc. *Maria Pop*

Clasa a VII-a

1. Se consideră pătratul $ABCD$ şi O punctul de intersecţie al diagonalelor sale. Construim pătratul $OEFG$, congruent cu $ABCD$, astfel încât $B \in (AE)$.

a) Să se arate că punctele B, C, G sunt coliniare.

b) Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului BEO.

Costel Anghel

2. Să se demonstreze că mulţimea $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ se poate partiţiona în mod unic în două submulţimi nevide A, B cu proprietatea că pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $x < y$, astfel încât $x \mid y$, sunt îndeplinite următoarele condiţii:

a) dacă $x \in A$ atunci $y \in B$;

b) dacă $y \in B$ atunci există $d \in A$ astfel încât $d \mid x$.

Marius Perianu

3. Aflaţi numerele $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2^{[x,y]} + 3^{(x,y)}$ să fie pătrat perfect, unde $[x, y]$ şi (x, y) reprezintă cel mai mic multiplu comun respectiv cel mai mare divizor comun al numerelor x şi y.

Alexandru Ciolan

4. Să se determine toate valorile numărului natural nenul k pentru care există un dreptunghi care se poate împărţi, ducând paralele la laturile sale, atât în k pătrate congruente cât şi în $k + 88$ pătrate congruente.

Marius Perianu

Clasa a VIII-a

1. a) Să se arate că $(2x + 3y)^2 - 3(x + 2y)^2 = x^2 - 3y^2$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că există o infinitate de numere naturale n pentru care $\sqrt{3n^2 + 7n + 4} \in \mathbb{Q}$.

Florian Dumitrel

2. Fie $A_1A_2...A_n$ un poligon regulat cu $n \geq 4$ vârfuri. Să se determine numărul maxim de elemente ale unei mulţimi $M \subset \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ astfel încât oricare patru puncte din M să nu fie vârfurile unui dreptunghi (sau pătrat).

Vasile Pop

3. Fie A şi B două mulţimi de numere naturale nenule cu proprietatea că pentru orice $a \in A$, există $b \in B$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numerele $\dfrac{b^{2n-1} + b^{2n}}{a^{2n-1}}$ şi $\dfrac{a^{2n} + a^{2n+1}}{b^{2n}}$ sunt naturale. Să se demonstreze că $A \subset B$.

Marius Perianu

4. Se consideră piramida $VABCD$, cu $ABCD$ patrulater convex. Se notează M, N, P, Q mijloacele muchiilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ şi G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor VAB, VBC, VCD, respectiv VDA. Să se demonstreze că dreptele MG_3, NG_4, PG_1, QG_2 sunt concurente.

Costel Anghel