I.S.J. Dâmbovița

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-CLASA a V-a

SUBIECTUL I

a) Demonstrați că: $\begin{array}{l} 86 \mid 9^{n+2}+5\cdot 9^{n}, n\in \mathbb{N}^{*} \\ 258 \mid 9^{n+2}+5\cdot 9^{n}, n\in \mathbb{N}^{*} \end{array}$.

b) Demonstrați că: $\begin{array}{l} 27 \mid 2^{n}+3\cdot 2^{n+1}+5\cdot 2^{n+2}, n\in \mathbb{N} \\ 54 \mid 2^{n}+3\cdot 2^{n+1}+5\cdot 2^{n+2}, n\in \mathbb{N}^{*} \end{array}$

SUBIECTUL II:

a) Aflați $\overline{abc}$, astfel încât numărul $n=\overline{abcabc}-2\cdot\overline{abc00}$ să fie pătrat perfect.
b) Aflați $\overline{abcd}$, astfel încât numărul $n=\overline{abcd000}-55\cdot\overline{abcd}$ să fie cub perfect.

***

SUBIECTUL III

Numerele naturale a, b,c împărțite la 4 dau câturi numere impare consecutive şi resturi nenule diferite.
a) Arătați că a+b+c se divide cu 6;
b) Determinați valoarea minimă a sumei a+b+c.

***

SUBIECTUL IV

Aflați numărul $\overline{xy}$ ştiind că $12\cdot\overline{xyx}=25\cdot\overline{yxy}$.

NOTĂ: *Toate subiectele sunt obligatorii.*
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte

I.S.J. Dâmbovița

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-CLASA a VI-a

SUBIECTUL I

a) Demonstrați că numărul $a=\frac{13}{15}+\frac{1515}{1313}+...+\frac{1515...15}{1313...13}$ (13 termeni) este natural.

b) Determinați numerele x,y,z naturale ştiind că $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7}$ şi 5x+7y+3z=142.

c) Determinați numerele naturale a,b,c, astfel încât $\frac{a}{a+b}=\frac{2b}{b+2}=\frac{a+c}{c+3}$.

SUBIECTUL II

Determinați cele mai mici numere naturale consecutive a,b,c,d $(a<b<c<d)$ ştiind că a se divide cu 10, b se divide cu 9, c se divide cu 8 iar d se divide cu 7.

***

SUBIECTUL III

Două unghiuri complementare au măsurile exprimate prin numere naturale al căror raport esre $\frac{0,1(a)}{0,(b)}$ (a şi b cifre în sistemul de numerație zecimal).

Aflați măsurile celor două unghiuri dacă a este un divizor propriu al lui b.

***

SUBIECTUL IV

Fie unghiul propriu AOB şi punctele M şi N, M în interiorul unghiului AOB iar N în exteriorul unghiului AOB. Semidreapta [OP este bisectoarea unghiului AOM, $m(\sphericalangle POB)=60^\circ$ şi $m(\sphericalangle BOM)=2m(\sphericalangle BON)$. Dacă [OQ este bisectoarea unghiului AOP, să se arate că $\sphericalangle NOQ$ este drept.

NOTĂ: *Toate subiectele sunt obligatorii.*
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte

I.S.J. Dâmbovița

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-CLASA a VII-a

SUBIECTUL I

a) Calculați: $\left[\left(5+2\sqrt{6}\right)^{2008}+\dfrac{1}{\left(5-2\sqrt{6}\right)^{2008}}\right]\cdot\dfrac{\left(10-4\sqrt{6}\right)^{2008}}{2^{2009}}$.

b) Demonstrați că: $|x+a|+|x-a|\geq 2|a|,(\forall)a,x\in\mathbb{R}$ şi apoi deduceți că, dacă $a,b\in(0;+\infty)$, atunci $|x+a|+|x+b|+|x-a|+|x-b|\neq a+b$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

***

SUBIECTUL II

Aflați ultimele 484 cifre ale numărului $N=1\cdot 2\cdot ...\cdot 2008-1$.

***

SUBIECTUL III

Fie BB' şi CC' mediane în triunghiul ABC, iar M,N puncte pe (BC) astfel încât $BM=MN=NC$. Fie $AM\cap CC'=\{P\}$ şi $AN\cap BB'=\{Q\}$. Demonstrați că:

a) $PQ\,||\,BC$;

b) $BC=5PQ$.

SUBIECTUL IV

Fie trapezul ABCD, $AB\,||\,CD$, $AB=3\cdot CD$, $AC\cap BD=\{O\}$. Prin O se duce $MN\,||\,AB, M\in(AD), N\in(BC), AN\cap DC=\{E\}$ si $BM\cap CD=\{F\}$.

a) Demonstrați că ABEF este paralelogram;

b) Dacă trapezul este isoscel, atunci ABEF este dreptunghi.

***

NOTĂ: *Toate subiectele sunt obligatorii.*
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte

I.S.J. Dâmbovița

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-CLASA a VIII-a

SUBIECTUL I

Fie a,b,c numere naturale nenule. Dacă $\frac{a\sqrt{2}+b\sqrt{3}}{b\sqrt{2}+c\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$, atunci

a) $a+b+c \mid a^2+b^2+c^2$

b) $2a+2b+c \mid 4a^2+c^2$

SUBIECTUL II

a) Determinați numărul întreg x, astfel încât $\sqrt{x^2+x+1} \in \mathbb{Q}$.
b) Fie a,b,c numere reale.
Demonstrați că $\max\left\{a^2-b, b^2-c, c^2-a\right\} \leq -\frac{1}{4}$ dacă şi numai dacă $a=b=c=\frac{1}{2}$.

***

SUBIECTUL III

a) Demonstrați că $(\forall)x, y>0, x<y$, avem $\frac{x}{1+x}<\frac{y}{1+y}$ şi deduceți că dacă $a,b,c>0$ şi $a<b+c$ atunci $\frac{a}{1+a}<\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$.

b) Demonstrați că $(\forall)a,b>0$ şi $x,y \in \mathbb{R}$ avem $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$ apoi deduceți că dacă $a,b,c,d>1$, atunci $\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{c-1}+\frac{c^2}{d-1}+\frac{d^2}{a-1} \geq 16$.

***

SUBIECTUL IV

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB=18cm$, $BC=60cm$, $AA'=80cm$ şi M mijlocul muchiei BB'. Determinați:
a) Aria secțiunii determinate de planul $A'DM$ în paralelipiped;
b) Cosinusul unghiului format de planele $A'DM$ şi ABC.

NOTĂ: *Toate subiectele sunt obligatorii.*
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte