

Inspectoratul Școlar Județean Argeș

Concursul de matematică „Dan Barbilian”, Curtea de Argeș, 24.11.2007

Clasa a VII-a

1. a) Determinați cardinalul mulțimii: $\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{Q}_+ \mid \frac{3px+3p+1}{px+1} \in \mathbb{N} \right\}$, unde p este

un număr natural dat.

b) Determinați numerele naturale m și n astfel încât să aibă loc egalitatea:

$$10 \cdot 2^m + 5 \cdot 2^n = 2^{m+n} + 32.$$

2. a) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $2^x - 3^y = 7$.

b) Arătați că nu există $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a^2 + b^2 - 16c = 6$.

3. Se consideră trapezul $ABCD$ în care $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle DAB) = 15^\circ$, $m(\sphericalangle CBA) = 75^\circ$, $AB = 10$ cm, $CD = 4$ cm. Fie E mijlocul lui $[AB]$ și F mijlocul lui CD . Calculați lungimea segmentului $[EF]$.

4. În triunghiul ABC măsurile unghiurilor A, B, C sunt direct proporționale cu 2, 3, 4 iar I este punctul de intersecție a bisectoarelor triunghiului. Calculați valoarea raportului $\frac{AI}{BC}$.

Probleme selectate de prof. Chirciu Marin

Notă: Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Soluții și barem (clasa a VII-a)

1. a) $\frac{3px+3p+1}{px+1} = n, n \in \mathbb{N}$ (1p)

$\Rightarrow x = \frac{n-3p-1}{p(3-n)} \geq 0 \Rightarrow n \in \{4, 5, 6, \dots, 3p+1\}$ (1p)

Deducem $\text{card}A = 3p - 2$ (1p)

b) Notând $2^m = a, 2^n = b$ obținem $a, b \in \mathbb{N}$ și $10a + 5b = ab + 32$ (1p)

$\Leftrightarrow b \cdot (a - 5) = 10a - 32 \Rightarrow b = \frac{10a-32}{a-5} \Leftrightarrow b = 10 + \frac{18}{a-5}$ (1p)

Din $b \in \mathbb{N}$ rezultă $a - 5 \in \mathcal{D}_{18}$. Convin $(a, b) \in \{(2, 4); (8, 16)\}$ (1p)

de unde $(m, n) \in \{(1, 2); (3,4)\}$ (1p)

2.a) Observă soluția (3, 0)(1p)

Scrie $2^2 (2^{x-2} - 1) = 3 (3^{y-1} + 1)$ (1p)

Deduce că $y = 2$ și $x = 4$, folosind teorema fundamentală a aritmeticii(1p)

b) Presupunem prin absurd că există $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a^2 + b^2 - 16c = 6$. Rezultă că $a^2 + b^2$ este număr par(1p)

Distingem cazurile:

i) a, b pare; $a = 2k, b = 2p, k, p \in \mathbb{Z}$. Avem $4k^2 + 4p^2 = 16c + 6 \Leftrightarrow 2k^2 + 2p^2 = 8c + 3$, imposibil, deoarece membrul stâng este par și membrul drept este impar(2p)

ii) a, b impare; $a = 2k + 1, b = 2p + 1, k, p \in \mathbb{Z}$. Avem $(2k + 1)^2 + (2p + 1)^2 = 16c + 6 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k + 4p^2 + 4p = 16c + 4 \Leftrightarrow k(k + 1) + p(p + 1) = 4c + 1$, imposibil, deoarece membrul stâng este par și membrul drept este impar.(1p)

3. Fie P și Q intersecțiile dreptei AB cu paralelele duse prin F la DA , respectiv CB(1p)

Deoarece $m(\sphericalangle FPQ) = m(\sphericalangle DAB) = 15^\circ$ și $m(\sphericalangle FQP) = m(\sphericalangle CBA) = 75^\circ$, rezultă că

$m(\sphericalangle PFQ) = 90^\circ$ (1p)

Avem $ADFP$ și $BCFQ$ paralelograme, deci $AP = DF$ și $BQ = FC$(1p)

Cum $DF = FC$ și $AE = BE$ obținem că E este mijlocul lui $[PQ]$ (1p)

Cum $[FE]$ este mediană în triunghiul dreptunghic PFQ rezultă că $FE = \frac{PQ}{2}$ (1p)

Dar $PQ = AB - CD = 10 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$ (1p)

Deducem că $EF = 3 \text{ cm}$(1p)

4. Din $\frac{m(\sphericalangle A)}{2} = \frac{m(\sphericalangle B)}{3} = \frac{m(\sphericalangle C)}{4} = \frac{180^\circ}{2+3+4} = 20^\circ$, obținem $m(\sphericalangle A) = 40^\circ, m(\sphericalangle B) = 60^\circ,$

$m(\sphericalangle C) = 80^\circ$(1p)

Fie $[CD, D \in (AB)$ astfel încât $m(\sphericalangle BCD) = 60^\circ$ (1p)

Din $\triangle BCD$ echilateral obținem $BC = CD$ (1)(2p)

Avem $m(\sphericalangle ACD) = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ, m(\sphericalangle IAC) = 40^\circ : 2 = 20^\circ$. Rezultă $\triangle IAC \equiv \triangle DCA$

(ULU) $\Rightarrow IA = CD$ (2)(2p)

Din (1) și (2) obținem că $AI = BC$, deci $\frac{AI}{BC} = 1$ (1p)

Notă: Orice soluție corectă se punctează corespunzător.

Inspectoratul Școlar Județean Argeș

**Concursul de matematică „Dan Barbilian”,
Curtea de Argeș, 24.11.2007**

Clasa a VIII-a

I. Fie $n \in \mathbb{N}$ și $A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{n} \leq x \leq \sqrt{n+2007} \}$.

- a) Aflați n astfel încât $\text{card } A = 44$.
- b) Determinați cel mai mic număr natural n astfel încât $A = \emptyset$.

II. Dacă $a, b, n \in \mathbb{N}^*$ și $A_n = \left\{ (a,b) \mid \frac{a}{b} \in (1,2), \frac{b}{n} \in (2,3) \right\}$, atunci:

- a) Arătați că nu există n astfel încât $(20; 7) \in A_n$.
- b) Determinați valorile lui n pentru care $(20; 15) \in A_n$.

III. Se consideră patru puncte necoplanare A, B, C, D astfel încât $AB = CD = 2 \text{ cm}$, $BC = AD = \sqrt{3} \text{ cm}$.

- a) Să se arate că $m(\sphericalangle(AB, CD)) < m(\sphericalangle(BC, AD))$.
- b) Dacă $AC = BD = \sqrt{7}$ și E este simetricul punctului C față de mijlocul O al segmentului $[BD]$, să se arate că $BC \perp AE$.

IV. Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu muchia de lungime a ($a > 0$). Se consideră punctele $K \in [AB]$, $L \in [CC']$, $M \in [D'A']$.
Determinați situația în care ΔMKL este echilateral.

Probleme propuse de prof. Codeci Daniel, Șc.Nr.1 „Carol I” Curtea de Argeș

Notă: Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.