Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj **Filiala Craiova a SSMR**

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ **ETAPA JUDEŢEANĂ**

Craiova, 7 martie, 2009

CLASA a V - a

Problema 1. a) Arătaţi că dublul sumei numerelor naturale care împărţite la 2009 dau câtul şi restul egale, se poate scrie ca produsul a trei numere naturale consecutive.
b) Să se determine numărul $\overline{xyzt}$, ştiind că împărţindu-l la numărul $\overline{yzt}$ obţinem câtul $x+1$ şi restul $x+2$.

Problema 2. Aflaţi suma ultimelor 50 de cifre ale numărului

$$N = 123 + 124 + \ ... \ + 321 + 123 \cdot 124 \cdot \ ... \ \cdot 321.$$

Problema 3. a) Se consideră mulţimea $A = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$. Construim şirul de submulţimi ale mulţimii A :

$$A_1 = \{2\},\ A_2 = \{4, 6\},\ A_3 = \{8, 10, 12\},\ A_4 = \{14, 16, 18, 20\}, \ldots .$$

Scrieţi mulţimile A_{10}, A_{11} şi A_{100}. Calculaţi suma elementelor mulţimii A_{100}.
b) Considerăm mulţimile $B = \{2009^n + n \mid n \in \mathbf{N}\}$ şi $C = \{n^{2009} + 2009 \mid n \in \mathbf{N}\}$. Precizaţi dacă există un element $b \in B$ astfel încât $b \neq c$, oricare ar fi $c \in C$.

Problema 4. Fie a şi b numere naturale, $a \neq 0$. Dacă fracţia $\dfrac{a+b}{5a+12b}$ este echivalentă cu $\dfrac{1}{6}$, calculaţi $\dfrac{b}{a}$.

E 12027, GM 10/2000

- clasa a-VI-a -

Problema 1. Determinaţi numerele naturale a, b, c, d ştiind că b, c şi d sunt distincte, a este număr prim şi $a + (b+c)(b+d)(c+d) = 62$.

(E 12669, GM 1/2004)

Problema 2. Determinaţi numerele $\overline{abcd}$ ştiind că numărul $\overline{463abcd}$ se divide la 1365.

(E 13469, GM 7/2007)

Problema 3. Fie $a, b, c \in \mathbf{N}^*$ astfel încât numerele $5a+3, 5b+3, 5c+3$ sunt direct proporţionale cu $5b+3, 5c+3, 5a+3$. Dacă numerele $x, y, z \in \mathbf{N}^*$ sunt invers proporţionale cu $a, 4b, 8c$ atunci numărul $x+y+z$ se divide la 11.

Problema 4. Fie M şi M' mijloacele laturilor (BC) şi respectiv $(B'C')$ ale triunghiurilor ABC şi respectiv $A'B'C'$. Arătaţi că dacă $[AM] \equiv [A'M'], [AB] \equiv [A'B']$ şi $[AC] \equiv [A'C']$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$. (***)

BAREM DE CORECTARE

CLASA a V - a

Problema 1. a) $n = 2009\,c + r$; $r \in \{0, 1, 2, \ldots, 2008\}$ . . . 1 p
$n = 2010\,r$ . . . 0,5 p
$S = 2010(1 + 2 + \cdots + 2008)$ . . . 1 p
$2S = 2008 \cdot 2009 \cdot 2010$. . . . 1 p
b) $\overline{xyzt} = \overline{yzt} \cdot (x + 1) + x + 2$ . . . 1 p
$2 = x \cdot (999 - \overline{yzt})$ . . . 1 p
$x = 1 \Rightarrow \overline{yzt} = 997$ . . . 0,5 p
$x = 2 \Rightarrow \overline{yzt} = 998$ . . . 0,5 p
$\overline{xyzt} \in \{1997, 2998\}$ . . . 0,5 p
Total . . . 7 p

Problema 2. $S = 123 + 124 + \cdots + 321 = 44178$. . . . 2 p
Notăm $P = 123 \cdot 124 \cdot\ ...\ \cdot 321$.
În P sunt: 40 multipli de 5, 8 multipli de 25, 2 multipli de 125 . . . 1 p
Exponentul puterii lui 5 în P este egal cu $(40 - 8) + 2(8 - 2) + 3 \cdot 2 = 50$. . . . 1 p
În P sunt 99 multipli de 2, deci exponentul puterii lui 2 în produs este > 50 . . . 1 p
Ultimele 50 de cifre ale numărului P sunt zerouri. . . . 1 p
Suma ultimelor 50 de cifre ale numărului N este $4 + 4 + 1 + 7 + 8 = 24$. . . . 1 p
Total . . . 7 p

Problema 3. a) A_k are k elemente . . . 0,5 p
Primul element din A_k este $k(k - 1) + 2$ . . . 1,5 p
$A_{10} = \{92, 94, ..., 108, 110\}$, $A_{11} = \{112, 114, ..., 130, 132\}$ . . . 1 p
$A_{100} = \{9902, 9904, ..., 10100\}$ . . . 0,5 p
$9902 + 9904 + ... + 10100 = 20002 \cdot 50 = 1000100$ . . . 1 p
b) $n = 0 \Rightarrow 1 \in B$ . . . 1 p
$n^{2009} + 2009 > 1$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ . . . 1 p
Există $b = 1$ astfel încât $1 \neq c$, pentru orice $c \in C$. . . . 0,5 p
Total . . . 7 p

Problema 4. $\dfrac{a + b}{5a + 12b} = \dfrac{1}{6}$ . . . 1,5 p
$\dfrac{a + b}{5a + 12b} = \dfrac{a + b}{6(a + b)}$ . . . 1,5 p
$5a + 12b = 6(a + b)$ . . . 1,5 p
$6b = a$ . . . 1,5 p
$\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{6}$ . . . 1 p
Total . . . 7 p