

## Clasa a VIII-a

## SUBIECTUL I ( 20p )

- (4p) 1) Care este prima zecimală a numărului  $\sqrt{101}$  ?  
 a) 0                      b) 1                      c) 2                      d) 3
- (4p) 2) Care este rezultatul calculului  $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$  ?  
 a)  $-\sqrt{3}$                       b)  $2\sqrt{3}$                       c)  $\sqrt{3}$                       d) 0
- (4p) 3) Care este media geometrică a numerelor  $\sqrt{7} - \sqrt{3}$  și  $\sqrt{7} + \sqrt{3}$  ?  
 a) 0                      b) 3                      c) 1                      d) 2
- (4p) 4) Care este media aritmetică a numerelor  $\sqrt{6} - \sqrt{2}$  și  $\sqrt{6} + \sqrt{2}$  ?  
 a) 0                      b) 2                      c)  $\sqrt{6}$                       d)  $\sqrt{2}$
- (4p) 5) Care este măsura unghiului format de diagonalele unui romb?  
 a)  $90^\circ$                       b)  $60^\circ$                       c)  $45^\circ$                       d)  $30^\circ$

## SUBIECTUL II ( 40p )

- (4p) 1) După efectuarea tuturor calculelor posibile, aflați forma finală a expresiei  
 $(2x + 3y + z) - (3x - 2y - z)$ .
- (4p) 2) Aflați rezultatul calculului  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ .
- (4p) 3) Scrieți ce obținem raționalizând fracția  $\frac{7}{\sqrt{3}}$ .
- (4p) 4) Aflați numărul întreg care este cel mai apropiat față de  $\sqrt{6}$ .
- (4p) 5) Scrieți soluția ecuației  $\frac{x-5}{3} = \frac{x+2}{2}$ .
- (4p) 6) Aflați aria unui romb cu diagonalele de  $5\text{cm}$  și  $6\text{cm}$ .
- (4p) 7) Un cerc are raza de  $4\text{cm}$ . Aflați lungimea diametrului său.
- (4p) 8) Aflați lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic cu lungimile catetelor de  $3\text{cm}$  și  $6\text{cm}$ .
- (4p) 9) Scrieți diferența lungimilor diagonalelor unui trapez isoscel.
- (4p) 10) Aflați valoarea lui  $\cos 60^\circ$ .

## SUBIECTUL III ( 15p )

Se consideră mulțimile  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$  și  $G = \{z \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \mid \text{există } x \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \text{ astfel încât } x \cdot z = 1\}$ .

- (4p) a) Să se verifice că  $0 \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$  și  $1 \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ . (4p) b) Să se verifice că  $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1$ .
- (2p) c) Să se arate că  $1 + \sqrt{2} \in G$ . (2p) d) Să se arate că, dacă  $z, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ , atunci  $z + y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ .
- (1p) e) Să se arate că, dacă  $z, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ , atunci  $z \cdot y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ .
- (1p) f) Să se arate că  $\sqrt{3} \notin \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ . (1p) g) Să se arate că  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] \cap (2013, 2013; 2013, 2014) \neq \emptyset$ .

## SUBIECTUL IV ( 15p )

Spunem că avem un "cub plin" dacă pe fiecare din cele 12 muchii ale sale scriem un număr din mulțimea  $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ , fără să repetăm vreunul dintre ele. Numim „valoarea” unei fețe suma dintre numerele de pe muchiile sale.

- (4p) a) Câte fețe are un cub?
- (4p) b) Care este cea mai mică „valoare” posibilă a unei fețe dintr-un "cub plin"?
- (2p) c) Care este cea mai mare „valoare” posibilă a unei fețe dintr-un "cub plin"?
- (2p) d) Desenați un "cub plin" pentru care mulțimea „valorilor” fețelor să aibă 6 elemente.
- (1p) e) Desenați un "cub plin" pentru care mulțimea „valorilor” fețelor să aibă 5 elemente.
- (1p) f) Desenați un "cub plin" pentru care mulțimea „valorilor” fețelor să aibă 2 elemente.
- (1p) g) Desenați un "cub plin" pentru care mulțimea „valorilor” fețelor să aibă 1 element.

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "EUCLID"

07. 12. 2013      Clasa a VIII –a    BAREM DE CORECTARE

| Oficiu   | (10p)              |                       |                               |             |                        |  |
|----------|--------------------|-----------------------|-------------------------------|-------------|------------------------|--|
| I.(20p)  | 1. (4p) a);        | 2. (4p) d);           | 3. (4p) d);                   | 4. (4p) c); | 5. (4p) a);            |  |
| II.(40p) | 1) (4p) $-x+5y+2z$ | 2) (4p) $5+2\sqrt{6}$ | 3) (4p) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ | 4) (4p) 2   | 5) (4p) -16            |  |
|          | 6) (4p) $15cm^2$   | 7) (4p) $8cm$         | 8) (4p) $3\sqrt{5}cm$         | 9) (4p) 0   | 10) (4p) $\frac{1}{2}$ |  |

## SUBIECTUL III

a)  $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}], 1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}].$

b)  $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 2-1 = 1.$  c) Rezultă din b).

d) Dacă  $z = a + b\sqrt{2}$  și  $y = c + d\sqrt{2}$ , atunci  $z + y = a + c + (b + d)\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}].$

e) Dacă  $z = a + b\sqrt{2}$  și  $y = c + d\sqrt{2}$ , atunci  $z \cdot y = ac + 2bd + (bc + ad)\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}].$

f) Să presupunem că  $\sqrt{3} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}].$  Atunci  $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ , cu  $a, b \in \mathbf{Z}$ , sau  $\sqrt{3} - b\sqrt{2} = a$ , sau  $3 + 2b^2 - 2b\sqrt{6} = a^2$ , de unde rezultă  $0 = b$  și  $\sqrt{3} = a$ , fals. Deci  $\sqrt{3} \notin \mathbf{Z}[\sqrt{2}].$

g) Arătăm că, dacă există  $a < b \in \mathbf{R}$  astfel încât  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] \cap (a, b) = \emptyset$ , atunci există  $t \in \mathbf{R}^*$ , astfel încât  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{kt \mid k \in \mathbf{Z}\}$ . Fie  $c = b - a > 0$ ; arătăm că oricare două puncte din mulțimea  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$  au distanța mai mare sau egală decât  $c$ . Într-adevăr, să presupunem că există  $x < y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ , astfel încât  $0 < y - x < c$ .

Notăm  $z = y - x$  și  $k = \left\lfloor \frac{a}{z} \right\rfloor$ . Atunci  $k \leq \frac{a}{z} < k + 1$  sau  $kz \leq a < (k + 1)z < b$ , iar  $(k + 1)z \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \cap (a, b)$ ,

fals. Considerăm acum  $s > 0$ ,  $s \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$  și  $t > 0$ , cel mai mic element strict pozitiv din mulțimea  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] \cap (0, s]$ , care este finită. Rezultă imediat că  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] \supset \{kt \mid k \in \mathbf{Z}\}$ . Apoi, dacă  $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ , notând  $\left\lfloor \frac{x}{t} \right\rfloor = k$ , obținem  $kt \leq x < kt + t$  sau  $0 \leq x - kt < t$ . Cum  $x - kt \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ , rezultă  $x - kt = 0$ , adică  $x = kt$ ,

deci  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{kt \mid k \in \mathbf{Z}\}$ , fals deoarece dacă  $u = \sqrt{2}$  și  $v = 1$  rezultă  $\sqrt{2} = \frac{u}{v} = \frac{kt}{pt} \in \mathbf{Q}$ . Dacă există

$a < b \in \mathbf{R}$  astfel încât  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] \cap (a, b) = \emptyset$ , atunci  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{kt \mid k \in \mathbf{Z}\}$ , fals. Deci

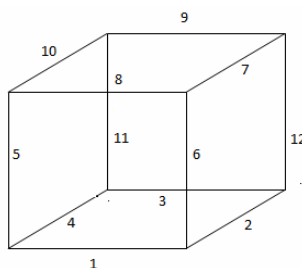
$\forall a < b \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \cap (a, b) \neq \emptyset.$

## SUBIECTUL IV

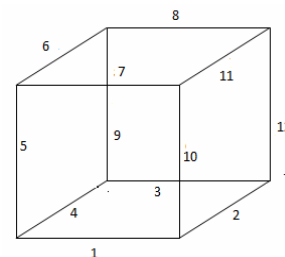
a) 6 fețe.

b)  $1+2+3+4=10$ .

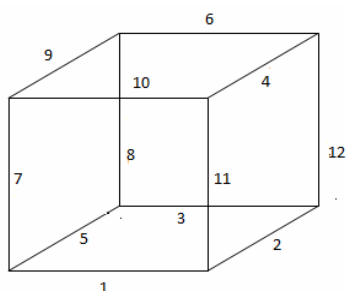
c)  $12+11+10+9=42$ .



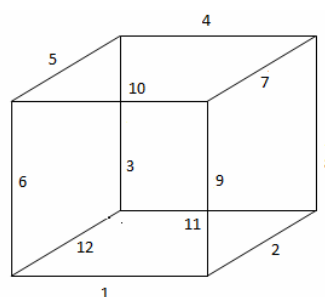
d) 6 sume diferite:



e) 5 sume diferite:



f) 2 sume diferite:



g) 1 sumă :