CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIȚIA a V-A, TULCEA, 23 februarie2013

Soluții orientative şi bareme

Clasa a VIII-a

Problema 1.

Se consideră numărul $p(m)=48m^2+16m+1$, unde $m\in\mathbb{N}^*$.

a) Dacă numărul $p(m)$ este pătrat perfect, arătați că *m* este produsul a două numere naturale consecutive.

b) Dați un exemplu de pereche de numere naturale nenule $(m;a)$ cu proprietatea că $p(m)=(8a+1)^2$.

prof. Mircea Fianu, Bucureşti

a) Avem $p(m)=(4m+1)(12m+1)$.	**1p**
Numerele $4m+1$ şi $12m+1$ sunt prime între ele.	**1p**
Dacă $p(m)$ este pătrat perfect, atunci fiecare dintre numerele $4m+1$ şi $12m+1$ este pătrat perfect.	**1p**
Cum numărul $4m+1$ este impar, există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $4m+1=(2k+1)^2$.	**1p**
Deducem că $4m+1=4k(k+1)+1$, de unde $m=k(k+1)$.	**1p**
b) Pentru $m=30$, obținem $p(30)=121\cdot361=(11\cdot19)^2=209^2$.	**1p**
Cum $209=8\cdot26+1$, obținem $a=26$, deci $(m;a)=(30;26)$.	**1p**

Problema 2.

Se consideră piramida *SABCD* în care baza *ABCD* este un paralelogram cu centrul în punctul *O*, $AB=2\sqrt{3}$ cm şi $A_{ABCD}=12\,\text{cm}^2$. Se ştie că $SO\perp(ABCD)$, $SO=\sqrt{3}$ cm, iar $(SBC)\perp(SDA)$.

a) Demostrați că piramida *SABCD* este regulată;

b) Arătați că $A_{SAC}=A_{SAB}$.

prof.Lucian Petrescu, Tulcea, prof. Mircea Fianu, Bucureşti

a) Considerăm punctele $E\in DC$ şi $F\in AB$ astfel încât $SE\perp DC$ şi $SF\perp AB$. Rezultă că punctele *E*, *O* şi *F* sunt coliniare, iar $EF\perp DC$.	**1p**
Deoarece $A_{ABCD}=AB\cdot EF$, rezultă că $EF=2\sqrt{3}$ cm.	**1p**
Considerăm punctele $M\in BC$ şi $N\in AD$ astfel încât $SM\perp BC$ şi $SN\perp AD$. Rezultă că punctele *M*, *O* şi *N* sunt coliniare, iar $MN\perp BC$. Cum dreapta de intersecție a planelor (SBC) şi (SDA) este paralelă cu *BC*, deducem că $m\left(\widehat{(SBC);(SAD)}\right)=m\left(\widehat{MSN}\right)=90^\circ$.	**1p**

În triunghiul dreptunghic MSN, $[SO]$ este mediană, deci $MN = 2\cdot SO = 2\sqrt{3}$ cm.	**1p**
Cum $AB = EF = MN$, rezultă că, în paralelogramul *ABCD*, distanțele dintre laturile opuse sunt egale cu laturile, rezultă că *ABCD* este pătrat. Prin urmare, piramida *SABCD* este regulată.	**1p**
b) Punctul F este mijlocul segmentului $[AB]$. Cum $AF = SO = \sqrt{3}$ cm, triunghiurile dreptunghice *SAF* şi *ASO* sunt congruente (I. C.)	**1p**
Deoarece $A_{SAC} = 2\cdot A_{ASO}$, iar $A_{SAB} = 2\cdot A_{ASF}$ rezultă că $A_{SAC} = A_{SAB}$.	**1p**

Problema 3.

Determinați numerele reale pozitive a şi b ştiind că $\dfrac{a}{b^2+2a+1}+\dfrac{b}{a^2+2b+1}\geq\dfrac{1}{2}$.

prof.Lucian Petrescu, Tulcea

Avem $a^2+1\geq 2a$, cu egalitate pentru $a=1$. Rezultă că obținem $a^2+2b+1\geq 2(a+b)$ şi, analog, $b^2+2a+1\geq 2(a+b)$, cu egalitate pentru $b=1$.	**2p**
Deci $\dfrac{a}{b^2+2a+1}\leq\dfrac{a}{2(a+b)}$ şi $\dfrac{b}{a^2+2b+1}\leq\dfrac{b}{2(a+b)}$.	**1p**
Prin adunarea ultimelor două inegalități rezultă că $\dfrac{a}{b^2+2a+1}+\dfrac{b}{a^2+2b+1}\leq\dfrac{1}{2}$.	**2p**
Din ipoteză $\dfrac{a}{b^2+2a+1}+\dfrac{b}{a^2+2b+1}\geq\dfrac{1}{2}$, deci $\dfrac{a}{b^2+2a+1}+\dfrac{b}{a^2+2b+1}=\dfrac{1}{2}$.	**1p**
Înseamnă că trebuie să avem egalitate în fiecare din inegalitățile $a^2+1\geq 2a$ şi $b^2+1\geq 2b$. Acest lucru are loc dacă şi numai dacă $a=b=1$.	**1p**

Problema 4.

Se consideră mulțimea $A=\left\{a+b\sqrt{2013}\;\middle|\;a,b\in\mathbb{N},\ a^2-2013b^2=1\right\}$. Arătați că:

a) Numărul $[x]$ este număr natural impar, pentru orice $x\in A$;

b) $3\{x\}\leq[x]$, pentru orice $x\in A$.

(Notațiile $[a]$ şi $\{a\}$ reprezintă *partea întreagă* şi respectiv *partea fracționară* a numărului real a .)

prof.Lucian Petrescu, Tulcea

a) Dacă $x\in A$, atunci $x\neq 0$, deci $x\geq 1$. Fie $x=a+b\sqrt{2013}\in A$, cu $a,b\in\mathbb{N}$ şi $a^2-2013b^2=1$. Cum $x\geq 1$, avem $\dfrac{1}{x}-1\leq 0$, deci $x+\dfrac{1}{x}-1\leq x$. Prin urmare, $x\geq x+\dfrac{1}{x}-1=a+b\sqrt{2013}+\dfrac{1}{a+b\sqrt{2013}}-1=2a-1$. (1)	**2p**
Pe de altă parte, $0\leq 2013b^2=a^2-1<a^2$, deci $b\sqrt{2013}<a$, echivalent cu $a+b\sqrt{2013}<2a$. (2)	**2p**

Din (1) şi (2) deducem că $2a-1\le x<2a$, deci $[x]=\left[a+b\sqrt{2013}\right]=2a-1$ care este număr impar.	**1p**
b) Din punctul anterior rezultă $[x]=x+\frac{1}{x}-1$, deci $\{x\}=x-[x]=1-\frac{1}{x}$.	**1p**
Inegalitatea $3\{x\}\le[x]$ este echivalentă cu $3\left(1-\frac{1}{x}\right)\le x+\frac{1}{x}-1$, sau $(x-2)^2\ge 0$.	**1p**