

SUBIECTUL 1

Soluție:

- a) $8(3^n + 3^{n+2} + 3^{n+4}) = 8 \cdot 3^n(1 + 3^2 + 3^4) = 8 \cdot 3^n \cdot 91 = 3^n \cdot 728 = 3^n(729 - 1) = 3^n(3^6 - 1) \dots 3p$
 b) $24 \cdot A + 9 = 24 \cdot 3 \cdot (1 + 3^2 + 3^4 + \dots + 3^{2010}) + 9 = 8 \cdot 9 \cdot (1 + 9 + 9^2 + \dots + 9^{1005}) + 9 =$
 $8 \cdot 9 + 8 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9^3 \dots + 8 \cdot 9^{1006} + 9 = (9 - 1) \cdot 9 + (9 - 1) \cdot 9^2 + (9 - 1) \cdot 9^3 + \dots + (9 - 1) \cdot 9^{1006} + 9$
 $= 9^2 - 9 + 9^3 - 9^2 + 9^4 - 9^3 + \dots + 9^{1007} - 9^{1006} + 9 = 9^{1007} = (3^{1007})^2$, pătrat perfect.4p

SUBIECTUL 2

Soluție:

- a) $n^2 - 2011n = n(n - 2011)$1p
 Dacă n este număr natural par, $n \geq 2011$, atunci produsul $n(n - 2011)$ este număr natural par.
 Dacă n este număr natural impar, $n \geq 2011$, factorul $n - 2011$ este par și atunci produsul $n(n - 2011)$ este număr natural par.....2p
 b) $y^2 - 3y = 3303 + 2^x \Leftrightarrow y(y - 3) = 3303 + 2^x$1p
 Avem $y > 3$ și cum produsul $y(y - 3)$ este număr par, iar 3303 fiind impar, rezultă 2^x este impar și de aici $x = 0$2p
 Înlocuind $x = 0$ se obține $y(y - 3) = 3304$, de unde $y \mid 3304$ și $y - 3 \mid 3304$, rezultă $y = 59$1p
 Numerele sunt: $x = 0$ și $y = 59$.

SUBIECTUL 3

Soluție:

- a) $m = \overline{abc} \cdot 100000 + \overline{abc} \cdot 10 + \overline{abc} = 100011 \cdot \overline{abc} = 37 \cdot 2703 \cdot \overline{abc} \div 37$3p
 b) $n = 300b + 30c + 3a + 700c + 70a + 7b = 73a + 307b + 730c$1p
 Calculând $10 \cdot \overline{abc} + n = 1000a + 100b + 10c + 73a + 307b + 730c = 1073a + 407b + 740c =$
 $37(29a + 11b + 20c) = \mathcal{M}_{37}$2p
 Din $10 \cdot \overline{abc} + n = \mathcal{M}_{37}$ și $\overline{abc} \div 37$, rezultă $n \div 37$1p

SUBIECTUL 4

Soluție:

- a) $3^{103} = 27 \cdot 3^{100} = (24 + 3) \cdot 3^{100} = 24 \cdot 3^{100} + 3^{101} = (4 \cdot 3^{100}) \cdot 6 + 3^{101}$2p
 Cum $3^{101} < 4 \cdot 3^{100}$, rezultă câtul este 6 și restul este 3^{101}1p
 b) $4 \cdot 3^{103} + 4 = 108 \cdot 3^{100} + 4 = 108 \cdot 3^{100} + 112 - 108 = (3^{100} - 1) \cdot 108 + 112$2p
 Cum $112 < 3^{100} - 1$, rezultă câtul este 108 și restul este 112.....2p

1. **Soluție:**

Din egalitatea ultimelor două rapoarte se obține $y^2(z + 1) = 2340$1p

Cum $2340 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$ și y^2 este un pătrat perfect care divide pe 2340, rezultă

$y \in \{1, 2, 3, 6\}$2p

Pentru $y = 1$ $\frac{234}{z+1} = \frac{1}{10}$, rezultă $z = 2339$ și din egalitatea cu primul raport $x = 200$... 1p

Pentru $y = 2$ $\frac{234}{z+1} = \frac{4}{10}$, rezultă $z = 584$ și cu primul raport $x = 300$1p

Pentru $y = 3$ $\frac{234}{z+1} = \frac{9}{10}$, rezultă $z = 259$ și cu primul raport $x = 400$1p

Pentru $y = 6$ $\frac{234}{z+1} = \frac{36}{10}$, rezultă $z = 64$ și cu primul raport $x = 700$1p

$(x, y, z) \in \{(200, 1, 2339), (300, 2, 584), (400, 3, 259), (700, 6, 64)\}$.

2. **Soluție:**

a) Fie $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n 984} = \overline{a 984}$, unde $a = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$1p

Avem $1000a + 984 = 948k$, care se mai poate scrie $948a + 52a + 948 + 36 = 948k$, de aici se deduce $52a + 36 = 948p$ sau $13a + 9 = 237p$, ecuație care are o soluție pentru $p = 3$ și $a = 54$2p

Și atunci $54984 = 948 \cdot 58$, constituie un exemplu de număr natural care se termină cu 984 și este divizibil cu 948.....1p

b) Numărul 984 este divizibil cu 8,.....1p

iar numerele naturale care se termină cu 948 nu sunt divizibile cu 81p

și atunci nu există numere naturale care se termină cu 948 și sunt divizibile cu 984.....1p

3. **Soluție:**

a) $m(\sphericalangle BOC) = 180^\circ - m(\sphericalangle BOE) - m(\sphericalangle COF)$ 1p

$m(\sphericalangle AOD) = 180^\circ - m(\sphericalangle AOE) - m(\sphericalangle DOF)$1p

$m(\sphericalangle BOE) = m(\sphericalangle AOE)$ și $m(\sphericalangle COF) = m(\sphericalangle DOF)$1p

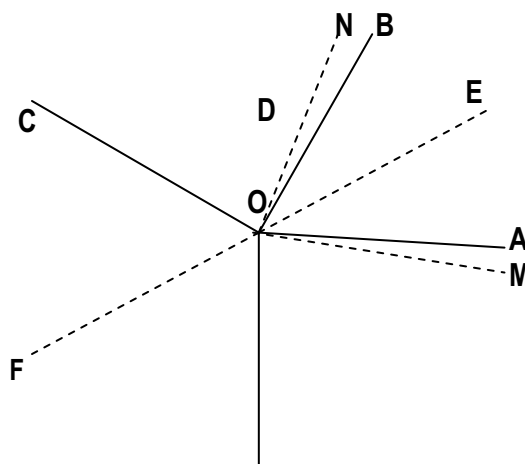
b) Dacă se notează $m(\sphericalangle AOB) = 6x$, $m(\sphericalangle BOC) = m(\sphericalangle AOD) = 7x$ și

$m(\sphericalangle COD) = 10x$1p

avem ecuația $6x + 7x + 7x + 10x = 360^\circ$, de unde $x = 12^\circ$1p

$m(\sphericalangle AOB) = 72^\circ$, $m(\sphericalangle BOC) = m(\sphericalangle AOD) = 84^\circ$ și $m(\sphericalangle COD) = 120^\circ$1p

$m(\sphericalangle MON) = m(\sphericalangle AOC) - m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle BOC) = 84^\circ$1p



Soluție:

4. a) Demonstrație.....2p

b) $\triangle ABM \equiv \triangle ACN$ (ULU), rezultă $AM = AN$ (1).....1p

$\triangle ACM \equiv \triangle ABN$ (LUL), rezultă $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle ANB$ (2).....1p

Din (1) rezultă $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ANM$ și cu (2) se deduce $\sphericalangle PMN \equiv \sphericalangle PNM$, de unde $PM = PN$ (3).....1p

Din (1), (2), (3), rezultă $\triangle AMP \equiv \triangle ANP$ (LUL) și atunci

$\sphericalangle MAP \equiv \sphericalangle NAP$, cum $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAN$ se obține $\sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle CAP$ și deci

[AP este bisectoarea unghiului BAC.....2p

