Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA a VII-a

Problema 1. Fie m şi n numere naturale nenule cu proprietatea că 5 divide $2^n + 3^m$. Să se arate că 5 divide $2^m + 3^n$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care M şi N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC, iar S este un punct mobil pe latura (BC). Să se arate că $(MB - MS)(NC - NS) \leq 0$.

Problema 3. Fie a şi b două numere naturale. Să se arate că numărul $a^2 + b^2$ este diferenţa a două pătrate perfecte dacă şi numai dacă ab este număr par.

Problema 4. Se consideră un triunghi echilateral ABC. Punctele M, N şi P sunt situate pe laturile AC, AB şi BC, respectiv, astfel încât $\angle CBM = \frac{1}{2}\angle AMN = \frac{1}{3}\angle BNP$ şi $\angle CMP = 90^\circ$.

a) Să se arate că triunghiul NMB este isoscel.

b) Să se determine măsura unghiului $\angle CBM$.

CLASA a VIII-a

Problema 1. Să se determine numerele reale pozitive x, y, z care verifică simultan egalităţile $x^2y^2+1 = x^2+xy$, $y^2z^2+1 = y^2+yz$ şi $z^2x^2+1 = z^2+xz$.

Problema 2. Numerele reale a, b, c, d, e au proprietatea că

$$|a - b| = 2|b - c| = 3|c - d| = 4|d - e| = 5|e - a|.$$

Să se arate că numerele a, b, c, d, e sunt egale.

Problema 3. Considerăm prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB = a$, $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, iar M este mijlocul muchiei $B'C'$. Fie F piciorul perpendicularei din B pe dreapta MC. Să se determine măsura unghiului dintre planele (BFD) şi (ABF).

Problema 4. Numerele naturale a şi b verifică relaţia

$$(a^2 - 9b^2)^2 - 33b = 16. \tag{1}$$

a) Să se arate că $|a - 3b| \geq 1$.

b) Să se determine toate perechile de numere naturale (a, b) care satisfac relaţia (1).