Olimpiada de matematică
Faza Județeană HUNEDOARA
7 Martie 2009

Clasa a V-a

1. Să se determine mulțimile nevide A şi B care verifică simultan condițiile:

i) $A \cap B = \{2\}$.

ii) Cel mai mare element al mulțimii $A \cup B$ este cel mult 6.

iii) Pentru orice $a \in A$, există $b \in B$, astfel încât $a+b$ este pătrat perfect.

iv) Pentru orice $b \in B$, există $a \in A$, astfel încât $b-a$ este pătrat perfect.

(Problemă din Gazeta Matematică nr.12/2008)

2. Andrei poate mânca o pizza în 30 minute, Alex în 15 minute, iar Adrian în 10 minute. În cât timp pot mânca cei trei băieți împreuna 6 pizza? Justificați răspunsul dat.

3. a) Să se arate că suma a 7 numere naturale consecutive este divizibilă cu 7;

b) Să se arate că dacă n este număr natural impar, atunci suma a n numere naturale consecutive este divizibilă cu n.

4. Se consideră mulțimea $M = \left\{2^a \cdot 3^b \;\middle|\; a,b \in \mathbb{N},\ a \le 100, b \le 100\right\}$.

a) Să se determine numărul elementelor mulțimii M.

b) Să se demonstreze că orice submulțime A a mulțimii M, cu 5 elemente conține cel puțin două elemente distincte a căror produs este pătrat perfect.

Clasa a VI-a

1. Se consideră un număr prim $p > 3$.

a) Să se demonstreze că restul împărțirii lui p la 4 este 1 sau 3.

b) Să se demonstreze că numărul $(p-1)(p+1)$ este divizibil cu 24.

(Problemă din Gazeta Matematică nr.10/2008)

2. Se consideră un triunghi ABC şi punctul E mijlocul segmentului $[BC]$, iar D, respectiv F este mijlocul segmentului $[BE]$, respectiv $[EC]$. Pe semidreapta $(AE$ se consideră punctul M astfel încât $[AE] \equiv [EM]$. Atunci:

a) Să se arate că $[AF] \equiv [DM]$. b) Să se arate că $\widehat{CAF} \equiv \widehat{BMD}$.

3. Se consideră mulțimea $M = \left\{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{N},\ a \le 10,\ b \le 10,\ c \le 10\right\}$.

a) În câte zerouri se termină produsul numerelor din mulțimea M ?

b) Să se demonstreze că orice submulțime A a lui M, cu 9 elemente conține cel puțin două elemente distincte a căror produs este pătrat perfect.

4. Se consideră în plan 10 puncte diferite.

a) Care este numărul maxim de drepte distincte determinate de cele 10 puncte? Justificați răspunsul dat.

b) Există o poziție a punctelor în plan astfel încât numărul de drepte distincte determinat de cele 10 puncte să fie egal cu 44? Justificați răspunsul dat.