

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "CONGRUENȚE",
EDIȚIA A III-A, 1 DECEMBRIE 2012, BRĂILA
CLASA A VII-a**

SUBIECTUL 1

1. a) Arătați că numărul $\sqrt{1+3+5+\dots+2013}$ este natural.

b) Demonstrați că nu există numere naturale de forma \overline{abc} astfel încât:

$$\sqrt{\overline{abc}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Constantin Apostol, Rm. Sărat

SUBIECTUL 2

Știind că $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 31^2 = 10416$, calculați suma $S = 3 + 5 + 8 + 12 + \dots + 467$.

Daniela Narcisa Ivan, Brăila

SUBIECTUL 3

În triunghiul ABC dreptunghic, $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$, M este mijlocul segmentului $[BC]$ și $BD \perp AM$, $D \in [AC]$. Demonstrați că: $m(\sphericalangle ACB) = 30^\circ \Leftrightarrow BD = 2 \cdot MD$.

Nicolae Cătălin Stănică, Brăila

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL 1

a) $A = 1 + 3 + 5 + \dots + 2013 = (2 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 1 + 1) + \dots + (2 \cdot 1006 + 1) \dots\dots\dots 1p$

$A = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 1006) + 1007 = 2 \cdot \frac{1006 \cdot 1007}{2} + 1007 \dots\dots\dots 1p$

$A = 1006 \cdot 1007 + 1007 = 1007^2 \dots\dots\dots 1p$

$\sqrt{A} = 1007 \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 1p$

b) $\sqrt{abc} \geq \sqrt{100} = 10 \dots\dots\dots 1p$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{9} + \sqrt{9} + \sqrt{9} = 9 \dots\dots\dots 1p$

$\sqrt{abc} \geq \sqrt{100} = 10 > 9 \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \dots\dots\dots 1p$

SUBIECTUL 2

Deoarece $467 = 2 + (1 + 2 + 3 + \dots + 30) \Rightarrow \dots\dots\dots 1p$

$S = (2 + 1) + (2 + 1 + 2) + (2 + 1 + 2 + 3) + \dots + (2 + 1 + 2 + 3 + \dots + 30) \dots\dots\dots 1p$

$S = \left(2 + \frac{1 \cdot 2}{2}\right) + \left(2 + \frac{2 \cdot 3}{2}\right) + \dots + \left(2 + \frac{30 \cdot 31}{2}\right) \text{ sau } \dots\dots\dots 1p$

$S = \left(2 + \frac{2^2 - 2}{2}\right) + \left(2 + \frac{3^2 - 3}{2}\right) + \dots + \left(2 + \frac{31^2 - 31}{2}\right) \text{ sau } \dots\dots\dots 1p$

$S = 2 \cdot 30 + \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 31^2}{2} - \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 31}{2} \text{ sau } \dots\dots\dots 1p$

$S = 2 \cdot 30 + \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 31^2}{2} - \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 31}{2} \text{ sau } \dots\dots\dots 1p$

$S = 60 + \frac{10416}{2} - \frac{496}{2} = 5020 \dots\dots\dots 1p$

SUBIECTUL 3

“ \Rightarrow ” $m(\sphericalangle ACB) = 30^\circ$ și triunghiul AMC este isoscel ($AM = BM = CM$)

$m(\sphericalangle MAC) = 30^\circ$ (1) $\dots\dots\dots 1p$

Triunghiul AMB echilateral $\Rightarrow BD$ este mediatoarea $[AM] \Rightarrow$ triunghiul ADM isoscel și conform (1) $\Rightarrow m(\sphericalangle AMD) = 30^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BMD) = 90^\circ$ și cum

$m(\sphericalangle DBC) = 30^\circ$, obținem: $MD = \frac{BD}{2} \dots\dots\dots 2p$

“ \Leftarrow ” Fie $P \in [BD]$ astfel încât $BP = PD = DM \dots\dots\dots 1p$

$AP = BP$, $BP \perp AM$, ΔAMB isoscel $\Rightarrow P$ este ortocentrul $\Delta AMB \Rightarrow AP \perp BC$ și $MP \perp AB \dots\dots\dots 1p$

Avem deci $AP = PD = MD$ și $MP \parallel AD \Rightarrow$ patrulaterul $APMD$ romb și deci ΔAPD este echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle PAD) = 60^\circ$ și deci $m(\sphericalangle ACB) = 30^\circ \dots\dots\dots 2p$

