CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

„SPERANŢE OLIMPICE”

EDIŢIA a XII-a

3 noiembrie 2012

clasa a IV -a

Subiecte

---

1. *a) Calculeaza*
175-{[(40 x 10 – 100) :100+18] x 3-12}:3.

b) Sa se calculeze a+b+c, stiind ca:

a x b=60, a x c=90 si b+c=10.

2. *a)Aflati valoarea lui “a” pentru a face adevarata egalitatea :* $(\overline{aaa}+\overline{aa})$*:a-a=119*

b) Fie trei numere naturale a caror suma este 170. Daca marim dublul celui de-al doilea

cu 4, obtinem cincimea primului numar. Sa se determine numerele, stiind ca suma

ultimelor doua numere este mai mare decat primul cu 10.

3 *a) Suma a sapte numere naturale este 2012. Se poate termina produsul lor in 2013? Justificati.*
b) Demonstrati ca din 61 de numere naturale distincte a caror suma nu depaseste 2012, putem alege doua a caror suma este 61.

***Nota**: Toate subiectele sunt obligatorii.*

Fiecare subiect va fi punctat de la 1 $\div$ *7*

Timp de lucru 2 ore si 30 min

(30 minute acomodare cu subiectul, timp de luru 2 ore)

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

„SPERANŢE OLIMPICE"

EDIŢIA a XII-a

3 noiembrie 2012

clasa a V -a

Subiecte

---

1. *Se considera numarul A=*$\overline{3a}+\overline{a3}$.
   a) *Determinati cifra a pentru care A este patrat perfect.*
   b) *Aratati ca nu exista valori pentru a, astfel incat A sa fie cub perfect.*
   c) *Determinati a, pentru care restul impartirii lui A la 9 este egal cu 3.*

2. *a) Aratati ca exista a,b,c numere naturale, astfel incat* $6^{2009}=a^3+b^3+c^3$
   b)Sa se determine ultimele tei cifre ale numarului $a=3^{4n+4}+2\cdot 3^{4n+2}+3^{4n}$.

3. *Scriem, pe rand, 2013 numere naturale nenule distincte, cu proprietatea ca suma oricaror doua numere vecine sa fie un numar par.*
   a) *Sa se demonstreze ca cea mai mica suma posibila a celor 2013 numere este patrat perfect.*
   b) *Sa se arate ca oricum am alege sapte din aceste numere exista cel putin doua numere a caror diferenta se imparte exact la 12.*

Nota: *Toate subiectele sunt obligatorii.*

Fiecare subiect va fi punctat de la $1\div 7$

Timp de lucru 2 ore si 30 min

(30 minute acomodare cu subiectul, timp de luru 2 ore)

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

„SPERANŢE OLIMPICE”

EDIŢIA a XII-a

3 noiembrie 2012

clasa a VI -a

Subiecte

1. *a) Aratati ca n(n+3)+2=(n+1)(n+2), oricare ar fi n∈ N.*
   b) Demonstati ca numarul

   A=$\dfrac{(2\cdot5+2)(4\cdot7+2)(6\cdot9+2)\cdot..\cdot(2012\cdot2015+2)}{(3\cdot6+2)(5\cdot8+2)(7\cdot10+2)\cdot...\cdot(2011\cdot2014+2)}$ *este natural.*

2. *a) Aflati numerele naturale x si y stiind ca suma lor este 250 si catul impartirii(cu rest) a lui x la y este 7.*
   b) Sa se afle restul impartirii numarului $S=1^1+2^2+3^3+4^4+5^5+6^6+...+2009^{2009}$ *la 4.*

3. *a) Determinati numerele naturale x si y stiind ca* $x^2+x+y=58$ *si y este numar prim.*

   b) Scrieti numarul 2010 ca o suma a unor numere naturale si ca produs al acelorasi numere naturale.

Nota: *Toate subiectele sunt obligatorii.*

Fiecare subiect va fi punctat de la 1 ÷ 7

Timp de lucru 2 ore si 30 min

(30 minute acomodare cu subiectul, timp de luru 2 ore)

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

„SPERANŢE OLIMPICE”

EDIŢIA a XII-a

3 noiembrie 2012

clasa a VII -a

Subiecte

---

1. *Pe un cerc sunt 11 numere naturale astefel incat suma oricaror 3 numere alaturate este cel mult 19, iar suma oricaror 4 numere alaturate este cel putin 25. Sa se determine suma celor 11 numere.*

2. *Fie a,b,c∈ R^*, aratati ca:*

   a) $\left(\frac{a^2}{b}-b\right)^2=\frac{a^4}{b^2}-2a^2+b^2$;

   b) $\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}\geq a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$.

3. *Se da patratul ABCD cu latura 7 si M,N,P,Q pe laturile [AB] , respectiv[BC],[CD],[DA], astfel incat AM=BN=CP=DQ=3.*
   Demonstrati ca MNPQ este patrat si precizati latura acestuia.

***Nota**: Toate subiectele sunt obligatorii.*

Fiecare subiect va fi punctat de la 1 ÷ 7

Timp de lucru 2 ore si 30 min

(30 minute acomodare cu subiectul, timp de luru 2 ore)

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

„SPERANŢE OLIMPICE”

EDIŢIA a XII-a

3 noiembrie 2012

clasa a VIII -a

Subiecte

---

1. a) Aratati ca $\frac{n}{1+n^2+n^4}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n-1)+1}-\frac{1}{n(n+1)+1}\right]$, $\forall\, n\in \mathbb{N}^*$

   b) Calculalti suma : S=$\frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{2}{1+2^2+2^4}+\frac{3}{1+3^2+3^4}+...+\frac{2012}{1+2012^2+2012^4}$

2. a)Determinati numerele reale x,y,z stiind ca:
   3(x+y+1)$\le(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}+2)^2$

   b) Aratati ca numerele a=$(2+1)(2^2+1)(2^{2^2}+1)....(2^{2^{2012}}+1)$ si b=$4^{2^{2012}}$ sunt consecutive.

3. Triunghiul ABC are $m\angle(BAC)=20°$ si $[AB]\equiv[AC]$. Fie M$\in(AC)$ astfel incat $m\angle(ABM)=10°$. Demonstrati ca $[AM]\equiv[BC]$.

   G.M. nr. 9/2012

Nota: *Toate subiectele sunt obligatorii.*

Fiecare subiect va fi punctat de la 1 $\div$ 7

Timp de lucru 2 ore si 30 min

(30 minute acomodare cu subiectul, timp de luru 2 ore)

clasa a IV -a

Borderou de corectare si notare

1. a) $175-[(3+18)\cdot 3-12]:3$ *1p*

$=175-(63-12):3$ *1p*

$=175-17=158$ *1p*

b)

$a\cdot b+a\cdot c=150$ *1p*

$a(b+c)=150\;\; a\cdot 10=150$ *1p*

$a=15, b=4, c=6$

$Suma=a+b+c=25$ *1p*

Oficiu *1p*

2. a) Prin incercari *3p*

sau

$(\overline{aaa}+\overline{aa}):a=111+11=122$ *1,5p*

$122-a=119 \Rightarrow a=3$ *1,5p*

b) $a+b+c=170$

$2b+4=a:5$

$b+c=a+10$ *1p*

$a+a+10=170 \Rightarrow a=80$ *1p*

$b=6, c=84$ *1p*

Oficiu 1p

3. a) Cel putin un numar este par.. 1,5p

Produsul este par, deci nu se termina in 2013...1,5p

b) Cele mai mici 61 numere naturale cu proprietatea ca nu exista printre ele doua cu suma 61 sunt 1, 2, 3, .., 30, 62, ..., 92 ....1p

Suma lor $=(1+2+3+...+30)+(62+...+92)=S_1+S_2$

$S_1=465, S_2=2387 \Rightarrow S=2852$ *...1,5p*

Suma depaseste 2012, deci exista doua numere cu suma 61.........................0,5p

Oficiu ....1p *clasa a V -a*

Borderou de corectare si notare

1. A = 11a + 33 = 11(a + 3) 2p

a) $A =$ *patrat perfect*

$\Rightarrow a+3=11 \Rightarrow a=8$ *...2p*

b) $A =$ *cub perfect* $\Rightarrow a+3=11^2 \Rightarrow a=118 \neq$ *cifra... ....1p*

c) $11a+33=9k+3 \Rightarrow a$ *se imparte exact la 3* $\Rightarrow a$ *poate fi 3, 6 sau 9 .Verifica a=3...1p*

Oficiu 1p

2. a) $6^{2009}=\left(6^{669}\right)^3 \cdot 6^2=\left(6^{669}\right)^3 \cdot 36=\left(6^{669}\right)^3 \cdot \left(1^3+2^3+3^3\right)=$

$=\left(6^{669}\right)^3+\left(6^{669} \cdot 2\right)^3+\left(6^{669} \cdot 3\right)^3$ *..3p*

b) $a=3^{4n}\left(3^4+2 \cdot 3^2+1\right)=3^{4n} \cdot 100 \Rightarrow$ *ultimele 3 cifre sunt 100................................3p*

Oficiu 1p

3. Deoarece suma oricaror doua numere vecine este numar par $\Rightarrow$ *toate numerele au aceeasi paritate 1p*

a) $1+3+5+...+4025=2013^2$ *...2p*

b) Impartind sapte numere de aceeasi paritate la 12 se pot obtine 6 resturi distincte (pare sau impare) 1p

Din principiul cutiei deducem ca, avand 7 numere, exista cel putin doua numere care dau acelasi rest la impartirea cu 12, deci diferenta lor se va divide cu 12.................2p

Oficiu 1p

clasa a VI -a

Borderou de corectare si notare

1. a) Se verifica prin calcul direct...2p

b) Avem succesiv, folosind a):

$2 \cdot 5 + 2 = 3 \cdot 4$

$4 \cdot 7 + 2 = 5 \cdot 6$

$6 \cdot 9 + 2 = 7 \cdot 8$

$\vdots$

$2012 \cdot 2015 + 2 = 2013 \cdot 2014$*, pentru numarator...1p*

$3 \cdot 6 + 2 = 4 \cdot 5$

$5 \cdot 8 + 2 = 6 \cdot 7$

$7 \cdot 10 + 2 = 8 \cdot 9$

$\vdots$

$2011 \cdot 2014 + 2 = 2012 \cdot 2013$*, pentru numitor..1p*

Rezulta:

$A = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot ... \cdot 2013 \cdot 2014}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot ... \cdot 2013} = 3 \cdot 2014$ *..1p*

Deci:

$A = 6042 \in N$ *..1p*

Oficiu 1p

2. a) $x = y \cdot 7 + 2$, *cu* $0 \le r < y$

Deci: $7y \le x < 8y$ *adunand* y *in toti membrii inegalitatii, obtinem:* $8y \le x + y < 9y$,

Rezulta:

$8y \le 250 < 9y$ 1p

Atunci: $y \le 31$ *si* $y \ge 28$, *obtinem*

$y \in \{28,29,30,31\}$..1p

- *Daca* $y = 28$, *rezulta* $x = 222$
- *Daca* $y = 29$, *rezulta* $x = 221$
- *Daca* $y = 30$, *rezulta* $x = 220$
- *Daca* $y = 31$, *rezulta* $x = 219$..1p

b) $S = \left(2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 2008^{2008}\right) + \left(1^1 + 3^3 + 5^5 + ... + 2009^{2009}\right)$

Evident:

$S_1 \vdots 4$ 1p

$S_2 = 1 + \left[(4-1)^3 + (4+1)^5\right] + \left[(8-1)^7 + (8+1)^9\right] + ... + \left[(2008-1)^{2007} + (2008+1)^{2009}\right] =$

$= 1 + (M_4 - 1 + M_4 + 1) + (M_4 - 1 + M_4 + 1) + ... + (M_4 - 1 + M_4 + 1) = M_4 + 1$.......1p

Rezulta: $S = S_1 + S_2 = M_4 + 1$, *deci restul impartirii lui* S *la 4 este 1* 1p

Oficiu 1p

3. a) Din $x^2 + x = x(x+1)$, *deduce ca* $x(x+1)$ *este numar par*.............................1p

Din $y = 58 - x(x+1)$, *deduce ca* y *este numar par, de unde rezulta ca*

$y = 2$ *(deoarece* y *trebuie sa fie prim)*...1p

Din $x(x+1) = 56$, *rezulta x = 7*...1p

b) Descompune pe

$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ 1p

Scrie

$2010 = 2 + 3 + 5 + 67 + \underbrace{1 + 1 + 1 ... + 1}_{de \quad 1993 \quad ori}$ *1p*

Scrie

$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{de \quad 1993 \quad ori}$ *1p*

Oficiu ....*1p* *clasa a VII -a*

Borderou de corectare si notare

1. *Fie* $x_1, x_2, ..., x_{11}$ *numerele*

$\underbrace{(x_1 + x_2 + x_3) + ... + (x_{11} + x_1 + x_2)}_{11 \quad grupe} \le 11 \cdot 19 = 209$ *..2p*

$3 \cdot (x_1 + ... + x_{11}) \le 209 \Rightarrow x_1 + ... + x_{11} \le 69$ *..1p*

$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + ... + (x_{11} + x_1 + x_2 +_3) \ge 11 \cdot 25 = 275$ *...2p*

$4 \cdot (x_1 + ... + x_{11}) \ge 275 \Rightarrow x_1 + ... + x_{11} \ge 69$ *...1p*

deci

$x_1 + ... + x_{11} = 69$ *..1p*

2. *a)*

$\left(\frac{a^2}{b} - b^2\right) = \left(\frac{a^2}{b} - b\right)\left(\frac{a^2}{b} - b\right) = \frac{a^4}{b^2} - 2a^2 + b^2$ *..1p*

b) $\left(\frac{a^2}{b} - b\right)^2 \ge 0$ *deducem*

$\frac{a^4}{b^2} + b^2 \ge 2a^2$ *...1p*

si analoagele

$\frac{b^4}{c^2} + c^2 \ge 2b^2$ *...1p*

$\frac{c^4}{a^2} + a^2 \ge 2c^2$ *...1p*

$\Rightarrow \frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2} \ge a^2 + b^2 + c^2$ *...1p*

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

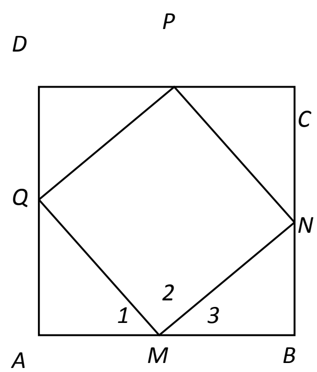
$(a - b)^2 \ge 0$ *deducem* $a^2 + b^2 \ge 2ab$

$b^2 + c^2 \geq 2bc$

$c^2 + a^2 \geq 2ca$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ *1p*

3.



$\Delta AMQ \equiv \Delta BNM \equiv \Delta CPN \equiv \Delta DQP$

deci $MQ = NM = PN = QP$

$MNPQ$ *- romb*

$\Delta AMQ \equiv \Delta BNM \Rightarrow \hat{M}_1 \equiv \hat{N}_1$

Fie x *latura patratului. Se exprima aria patratului* $ABCD$ *in doua moduri.*

$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{AMQ} + S_{MNPQ}$ *1p*

$49 = 24 + x^2$ *1p*

$x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ *1p*