MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI
ŞCOALA NR.22 "B. P. HAŞDEU" IAŞI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ

FLORICA T. CÂMPAN

EDIȚIA A X-A
ETAPA JUDEȚEANĂ, 20 FEBRUARIE 2010

Clasa a VI-a
BAREM

SUBIECTUL I
Din oficiu (2p)

$$d_1=(a,b,c)\Rightarrow\begin{cases}a=d_1\cdot k\\ b=d_1\cdot l\\ c=d_1\cdot p\end{cases}$$ şi cum *a, b, c* sunt impare atunci *k, l, p* sunt impare. (3p)

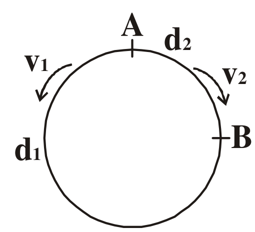
$$\left.\begin{aligned}\Rightarrow\frac{a+b}{2}&=\frac{k+l}{2}\cdot d_1=m_1\cdot d_1\\ \frac{b+c}{2}&=\frac{l+p}{2}\cdot d_1=m_2\cdot d_1\\ \frac{c+d}{2}&=\frac{p+k}{2}\cdot d_1=m_3\cdot d_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow d_1/d_2\quad \textbf{(1)}\ \ldots\ldots\ldots.(3p)$$

$$d_2=\left(\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2},\frac{c+a}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}a+b=d_2\cdot q\cdot 2\\ b+c=d_2\cdot r\cdot 2\\ c+d=d_2\cdot s\cdot 2\end{cases}\ \ldots\ldots\ldots.(3p)$$

$$\left.\begin{aligned}a+b+c=d_2(q+r+s)\Rightarrow d_1/a+b+c\\ d_2/b+c\end{aligned}\right\}d_2/a.\ \ldots\ldots\ldots.(2p)$$

Analog d_2 / b şi $d_2 / c \Rightarrow d_2 / d_1$ **(2)**……….(1p)
Din **(1)** şi **(2)** $\Rightarrow d_1 = d_2$. ……….(1p)

SUBIECTUL II



a) Notăm:
– v_1 şi v_2 vitezele de deplasare ale lui Gigel, respectiv, Costel;
– d_1 şi d_2 distanțele parcurse de Gigel, respectiv, Costel până în momentul întâlnirii în punctul *B*.
Din oficiu: 2p

Gigel şi Costel s-au întâlnit prima dată în punctul *B* după $\frac{d_1}{v_1}=\frac{d_2}{v_2}$ (secunde) **(1)** – (1p)

Avem $d_2 = 81v_1$ şi $d_1 = 144\,v_2$, de unde $\frac{d_1}{d_2}=\frac{144\cdot v_2}{81\cdot v_1}$ **(2)** – (2p)

Din **(1)** şi **(2)** rezultă $\frac{v_1}{v_2}=\frac{d_1}{d_2}=\frac{144\cdot v_2}{81\cdot v_1}$, de unde $\frac{v_1^2}{v_2^2}=\frac{144}{81}=\left(\frac{12}{9}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2$.

Deci $\frac{v_1}{v_2}=\frac{4}{3}$ şi $d_1=\frac{4}{3}\cdot d_2$. – (2p)

Deoarece Gigel parcurge distanța d_2 în 81 de secunde rezultă că distanța d_1 o parcurge în $\frac{4}{3}\cdot 81=108$ secunde. – (1p)

Gigel face un tur complet de pistă în 81 + 108 = 189 secunde, iar Costel în 144 + 108 secunde. – (1p)

Costel se deplasează cu $\frac{2268}{252} = 9$ m/s = 32,4 km/h. – (1p)

Gigel se deplasează cu $\frac{2268}{189} = 12$ m/s = 43,2 km/h. – (1p)

b) 1 oră 53 minute 24 secunde = 6804 secunde. (1p)
Gigel a realizat 6804 : 189 = 36 tururi de pistă. (1p)
Costel a realizat 6804 : 252 = 27 tururi de pistă. (1p)
Gigel a parcurs 2268 · 36 = 81,648 km. (1p)
Costel a parcurs 2268 · 27 = 61,236 km. (1p)

SUBIECTUL III

Din oficiu (2p)
Se constată că:

(1) $A_1A_2 = \frac{AB}{2n},\ A_2A_3 = \frac{AB}{2^2\cdot n},...,A_{k-1}A_k = \frac{AB}{2_{k-1}\cdot n}$; ……….(2p)

(2) $MM_1 = \frac{AB}{2^2\cdot m},\ M_1M_2 = \frac{AB}{2^3\cdot m}, M_2M_3 = \frac{AB}{2^4\cdot m},...,M_{k-1}M_k = \frac{AB}{2^{k+1}\cdot m}$, ……….(2p)

a) Punctul A_i coincide cu M dacă:
$AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{i-1}A_i = AM$, relație care, ținând seama de **(1)**, se scrie sub forma: $\frac{AB}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{k-1}}\right)=\frac{AB}{2}$, ……….(1p) echivalentă cu $\frac{1}{n}\cdot\frac{2^k-1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2}$, de unde se deduce $2^k-1=n\cdot 2^{k-2}$ şi se obține $k = 2$ şi $n = 3$. ……….(1p)

Deci răspunsul este afirmativ.

b) Punctul M_j coincide cu B dacă:

$MM_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + ... + M_{j-1}M_j = MB = \frac{AB}{2}$, adică……….(2p)

$\frac{AB}{2^2\cdot m}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{k-1}}\right)=\frac{AB}{2}$, condiție echivalentă cu $\frac{1}{2^2\cdot m}\cdot\frac{2^k-1}{2^{k-1}}=\frac{1}{2}$…..(1p)

Ultima egalitate se poate scrie sub forma $2^k-1=2^k\cdot m$, egalitate ce nu poate fi adevărată în condițiile date, deci Bitsy nu va putea „ateriza“ în B.……….(1p)

c) Presupunem că există k în aşa fel încât $A_k = M_k$.

Atunci $AA_k - MM_k = AM = \frac{AB}{2}$.

Obținem $\frac{1}{n}\cdot\frac{2^k-1}{2^{k-1}}-\frac{1}{2^2\cdot m}\cdot\frac{2^k-1}{2^{k-1}}=\frac{1}{2}$, echivalentă cu $\frac{4m-n}{mn}=\frac{2^k}{2^k-1}$, ………..(1p)
de unde se deduce $4m - n > m n$, adică $4m > n(m+1)$, ceea ce implică $n \le 3$. ……(1p)