Soluţii şi bareme: CLASA a VIII -a

Problema 1. Gazeta Matematică, nr. 10/2012

a) Fie $X = AM \cap A'B$; triunghiurile $A'XA$ şi BXM sunt asemenea, cu raportul de asemnare $\frac{A'A}{BM} = 2$ 1p

Avem: $AX = \frac{2}{3}AM$, $A'X = \frac{2}{3}A'B$, deci

$A'X^2 = \frac{4}{9}A'B^2 = \frac{4}{9}(AB^2 + AA'^2) = \frac{4}{3}$ $\qquad AX^2 = \frac{4}{9}AM^2 = \frac{4}{9}(AB^2 + BM^2) = \frac{2}{3}$

Se verifică relaţia $AX^2 + A'X^2 = 2 = AA'^2$, deci triunghiul AXA' este dreptunghic, adică $A'B \perp AM \subset (AMD)$ (1) 1p

Pe de altă parte, $DA \perp (A'AM)$, deci $DA \perp AM$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă $AM \perp (ADM)$ 1p

b) Fie $\{Y\}$ mijlocul lui MN.

Avem $YO \perp AD$ şi $AA' \perp AO$, deci $AA' \parallel OY$. Dreptele A'O şi AY sunt concurente şi cum $AY \subset (AMN)$ rezultă că $\{G\} = A'O \cap AY$ 2p

Triunghiurile $A'GA$ şi OGY sunt asemenea, cu raportul de asemănare $\frac{AA'}{OY} = 2$, deci $\frac{AG}{AY} = \frac{2}{3}$ şi $\frac{A'G}{A'O} = \frac{2}{3}$ 1p

Deoarece AY este mediană în triunghiul AMN şi A'D este mediană în triunghiul A'BD rezultă că G este centru de greutate în triunghiul AMN şi tot G este centru de greutate în triunghiul ABD 1p

Problema2. *Maria Pop, Cluj-Napoca*

Arătăm că singura funcţie este $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{N}^*$ Pentru $x \neq 1$ avem:

$x = [1, x] \overset{(1)}{=} [f(1), f(x)] \Rightarrow$ 2p

$\Rightarrow f(1) \mid x$ şi $f(x) \mid x,\ \forall x \neq 1$ 1p

Din $f(1) \mid 2$ şi $f(1) \mid 3$ rezultă $f(1) = 1$ 1p

şi revenind în (1) rezultă

$x = [f(1), f(x)] = [1, f(x)] = f(x),\ \forall x \neq 1$ 2p

deci $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{N}^*$ 1p

Problema 3. Vasile Pop, Cluj-Napoca

Fie O intersecţia diagonalelor AC şi BD şi punctele D' pe semidreapta OD şi B' pe semidreapta OB, astfel ca OD'=OB'=OC=OA (punctele D şi B se află pe segmentul [D'B']) 1p

Patrulaterul $AB'CD'$ este un dreptunghi care acoperă paralelogramul ABCD 1p

Vom arăta că aria sa este cel mult $\sqrt{3}$. Avem:

$\frac{\mathcal{A}(AB'CD')}{\mathcal{A}(ABCD)} = \frac{2\mathcal{A}(ACD')}{2\mathcal{A}(ACD)} = \frac{OD'}{OD} = \frac{OA}{OD}$ 1p

În triunghiul ABD, AO este mediană şi avem :

$OA^2 = \frac{2(AB^2+AD^2)-BD^2}{4} \leq \frac{2(BD^2+BD^2)-BD^2}{4} = \frac{3BD^2}{4} = 3OD^2$ 2p

şi atunci $(\frac{OA}{OD})^2 \leq 3$, deci $\frac{OA}{OD} \leq \sqrt{3}$ 1p

Dacă $\mathcal{A}(AB'CD') < \sqrt{3}$ prelungim OC la OC_1, OD' la OD_1, OA la OA_1, OB' la OB_1 astfel încât $OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1$ 1p

şi dreptunghiul $A_1B_1C_1D_1$ să aibă aria exact $\sqrt{3}$.

Problema 4. Ghiţă Romanţa, Ghiţă Ioan - Blaj

Pentru $a = 0$ sau (şi) $b = 0$ avem o inegalitate evidentă 0.5p

Fie $a, b > 0$ 0.5p

$5a^5 + 5a^2b^3 + 5b^2a^3 + 5b^5 \leq 6a^5 + 6b^5 \Leftrightarrow 5a^2b^2(a+b) \leq (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$ ... 1p

Impărţim relaţia prin $a + b$ şi obţinem:

$\Leftrightarrow ab(a^2 + b^2) \leq a^4 - 4a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 6a^2b^2$ .. Notăm $a \cdot b = P$ şi $a + b = S$ .. 1p

$\Leftrightarrow P(S^2 - 2P) \leq (S^2 - 2P)^2 - 6P^2$ 1p

$\Leftrightarrow PS^2 - 2P^2 \leq S^4 - 4PS^2 - 2P^2 \Leftrightarrow S^4 \geq 5PS^2 \Leftrightarrow S^2 \geq 5P$ 1p

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 3ab$ 1p

$\Leftrightarrow (a - b)^2 \geq ab \Leftrightarrow \mid a - b \mid \geq \sqrt{ab}$ "A" 1p