A 55-A OLIMPIADĂ NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Deva, 5 aprilie 2004

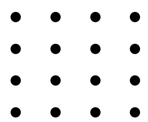
CLASA A VII-A

Subiectul 1. Pe laturile AB şi AD ale rombului $ABCD$ se consideră punctele E, respectiv F astfel încât $AE = DF$. Dreptele BC şi DE se intersectează în punctul P, iar dreptele CD şi BF se intersectează în punctul Q. Să se demonstreze că:
a) $\frac{PE}{PD} + \frac{QF}{QB} = 1$;
b) punctele P, A, Q sunt coliniare.

Subiectul 2. Lungimile laturilor unui triunghi sunt a, b, c.
a) Să se demonstreze că există un triunghi care are laturile de lungimi $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ şi $\sqrt{c}$.
b) Să se demonstreze că $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} \leq a + b + c < 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac}$.

Subiectul 3. Trapezul $ABCD$ este ortodiagonal şi dreptunghic. Măsura unghiului A este de $90°$, iar AB este baza mare. Diagonalele trapezului se intersectează în O, $(OE$ este bisectoarea unghiului AOD, $E \in (AD)$ şi $EF || AB$, $F \in (BC)$. Notăm cu P şi Q intersecţiile segmentului EF cu diagonalele AC, respectiv BD. Să se demonstreze că:
a) $EP = QF$;
b) $EF = AD$.

Subiectul 4. În nodurile unei reţele de pătrate se consideră 16 puncte plasate astfel:



a) Să se arate că putem alege 6 puncte astfel încât să nu existe triunghiuri isoscele cu vârfurile în punctele alese.

b) Să se demonstreze că oricum am alege 7 puncte din cele 16 există un triunghi isoscel cu vârfurile în punctele alese.