Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală
Iaşi, 17 Aprilie 2006

CLASA A VII-A

Subiectul 1.
Considerăm ABC un triunghi şi punctele M şi N aparţin laturilor AB, respectiv BC astfel încât $\frac{2 \cdot CN}{BC} = \frac{AM}{AB}$. Fie P un punct pe dreapta AC. Să se arate că dreptele MN şi NP sunt perpendiculare dacă şi numai dacă PN este bisectoarea unghiului $\angle MPC$.

Subiectul 2.
Un pătrat de latură n este format din n^2 pătrate unitate, fiecare colorat cu roşu, galben sau verde. Să se determine n minim astfel încât, pentru orice colorare, să existe o linie şi o coloană cu cel puţin trei pătrate unitate colorate identic (aceeaşi culoare pe linia şi pe coloana găsite).

Subiectul 3.
Triunghiul ascuţitunghic ABC are unghiul C cu măsura de $45°$. Punctele A_1 şi B_1 sunt picioarele înălţimilor din A şi B, iar H este ortocentrul triunghiului. Considerăm punctele D şi E situate pe segmentele AA_1 şi BC cu proprietatea că $A_1D = A_1E = A_1B_1$. Să se demonstreze că:
a) $A_1B_1 = \sqrt{\frac{A_1B^2 + A_1C^2}{2}}$;
b) $CH = DE$.

Subiectul 4.
Fie A o mulţime de numere naturale nenule cu cel puţin 2 elemente. Se ştie că pentru orice numere $a, b \in A$, $a > b$, avem $\frac{[a,b]}{a-b} \in A$. Să se arate că mulţimea A are exact 2 elemente.
($[a, b]$ semnifică cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b).

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.