CLASA a V-a, SOLUŢII şi BAREM DE CORECTARE

Problema 1. O mulţime A este alcătuită din 5 numere raţionale pozitive. Se ştie că mulţimea produselor obţinute prin înmulţirea a câte două elemente distincte din A este $\{0{,}1;\ 0{,}15;\ 0{,}375;\ 1;\ 1{,}6;\ 2{,}5;\ 3{,}75;\ 4;\ 6;\ 40\}$. Determinaţi mulţimea A.

Soluţie. Fie $a < b < c < d < e$ elementele lui A .... **(1 punct)**.
Atunci $ab = 0{,}1$ şi $de = 40$ .... **(2 puncte)**.
Înmulţind toate produsele avem $(abcde)^4 = 81$ .... **(1 punct)**.
Rezultă $abcde = 3$, deci $c = 0{,}75$ .... **(1 punct)**.
Apoi, din $ac = 0{,}15$ şi $ce = 6$ reiese $a = 0{,}2$, $e = 8$ şi, în final, $b = 0{,}5$, $d = 5$ .... **(2 puncte)**.

Problema 2. Între clasele a V-a ale unei şcoli se desfăşoară un turneu de fotbal după regulile obişnuite:

• fiecare echipă dispută câte un meci cu fiecare dintre celelalte echipe;

• în cazul unei victorii, echipa învingătoare primeşte 3 puncte şi echipa învinsă nu primeşte niciun punct, iar în cazul unui meci egal, ambele echipe primesc câte un punct.

La sfârşitul turneului se constată că numărul total de puncte din clasament este 21. Aflaţi câte echipe au participat la turneu şi câte puncte a luat fiecare echipă. Justificaţi răspunsul.

Soluţie. Deoarece într-un meci se câştigă 2 sau 3 puncte, trebuie să se dispute cel puţin 7 şi cel mult 10 meciuri.. **(2 puncte)**.
Apoi, în cazul în care sunt $2, 3, 4, 5, 6, \dots$ echipe, numărul meciurilor disputate este $1, 2, 6, 10, 15, \dots$, deci numărul echipelor nu poate fi decât 5 .... **(3 puncte)**.
În plus, singura posibilitate ca suma punctelor obţinute să fie 21 este ca să existe o victorie şi 9 meciuri egale, deci punctajele obţinute sunt $6, 4, 4, 4, 3$ .... **(2 puncte)**.

Problema 3. Determinaţi toate perechile de numere naturale impare de două cifre $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ care au proprietatea că prin împărţirea lui $\overline{cd}$ la $\overline{ab}$ se obţine restul 2, iar prin împărţirea lui $\overline{abcd}$ la $\overline{cd}$ se obţine restul $\overline{ab}$.

Soluţie. Avem relaţiile $\overline{cd} = m\overline{ab} + 2$, $\overline{abcd} = n\overline{cd} + \overline{ab}$ .... **(2 puncte)**.
Din a doua relaţie obţinem $99\overline{ab} = (n-1)\overline{cd}$ .... **(1 punct)**.
Înlocuind, rezultă $99\overline{ab} = (n-1)m\overline{ab} + 2(n-1)$, deci $n-1$ este divizibil cu $\overline{ab}$ .... **(1 punct)**.
Reiese $n - 1 = q\overline{ab}$, de unde $99 = q(m\overline{ab} + 2)$.. **(1 punct)**.
Sunt posibile cazurile $m\overline{ab} + 2 = 33$ şi $m\overline{ab} + 2 = 99$, ceea ce duce la $\overline{ab} = 31, m = 1, \overline{cd} = 33$ şi $\overline{ab} = 97, m = 1, \overline{cd} = 99$ .... **(2 puncte)**.

Problema 4. Dacă în figura 1, alcătuită din 9 beţe de chibrituri, eliminăm trei beţe (de exemplu, cele desenate cu linie subţire), atunci în figura rămasă nu mai apare reprezentat complet niciun triunghi mic.

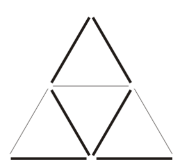

Figura 1

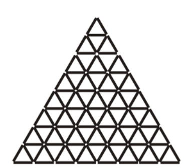

Figura 2

În construcţia din figura 2 sunt 108 beţe şi 64 de triunghiuri mici. Determinaţi numărul minim de beţe care trebuie eliminate, astfel încât în figura rămasă să nu mai existe niciun triunghi mic complet reprezentat.

Soluţie. O posibilitate de a „desfiinţa" toate triunghiurile mici este să eliminăm cele 36 de beţe „orizontale" .... **(3 puncte)**.

Arătăm că aceasta nu este posibil dacă eliminăm mai puţine beţe. Pentru aceasta, colorăm alternativ alb/negru triunghiurile fiecărui rând orizontal, începând cu alb de fiecare dată. Fiecare băţ eliminat desfiinţează două triunghiuri de culori diferite, sau un singur triunghi. Deoarece numărul triunghiurilor albe este 36 (fiecare rând are cu un triunghi alb mai mult decât negre), trebuie eliminate cel puţin 36 de beţe .... **(4 puncte)**.