A 56-A OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Bistriţa, 29 martie 2005

CLASA A VII-A

Subiectul 1. Fie $ABCD$ un paralelogram. Bisectoarea unghiului $\angle ADC$ intersectează dreapta BC în E, iar mediatoarea laturii AD intersectează dreapta DE în punctul M. Fie F intersecţia dreptelor AM şi BC. Să se arate că:
(a) $DE = AF$;
(b) $AD \cdot AB = DE \cdot DM$.

Daniela şi Marius Lobază, Timişoara

Subiectul 2. Fie a şi b două numere întregi. Să se arate că:
(a) 13 divide $2a + 3b$ dacă şi numai dacă 13 divide $2b - 3a$;
(b) Dacă 13 divide $a^2 + b^2$, atunci 13 divide $2a + 3b$ sau $2b + 3a$.

Mircea Fianu, Bucureşti

Subiectul 3. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele AB şi CD, având diagonalele perpendiculare în O. Pe semidreptele $(OA$ şi $(OB$ se consideră punctele M şi respectiv N astfel încât unghiurile $\angle ANC$ şi $\angle BMD$ să fie drepte. Notăm cu E mijlocul segmentului MN. Să se arate că:
(a) Triunghiurile OMN şi OBA sunt asemenea.
(b) Dreapta OE este perpendiculară pe dreapta AB.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Subiectul 4. Pe o circumferinţă se scriu 2005 numere naturale cu suma 7022. Să se arate că există două perechi formate din numere vecine astfel încât suma elementelor din fiecare pereche să fie mai mare sau egală decât 8.

Prelucrare după Marin Chirciu, Piteşti

CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Se consideră un cub cu muchia de lungime 1. Să se arate că un tetraedru cu vârfurile în mulţimea vârfurilor cubului are volumul $\frac{1}{6}$ dacă şi numai dacă trei dintre vârfurile tetraedrului sunt vârfuri ale unei feţe a cubului.

Dinu Şerbănescu, Bucureşti

Subiectul 2. Pentru un număr natural n, scris în baza 10, notăm prin $p(n)$ produsul cifrelor sale.

(a) Să se demonstreze că $p(n) \leqslant n$.

(b) Să se determine numerele naturale n cu proprietatea:

$$10p(n) = n^2 + 4n - 2005.$$

Eugen Păltănea, Braşov

Subiectul 3. Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Punctele M şi N sunt mijloacele muchiilor BB', respectiv BC, iar unghiul format de dreptele AB' şi BC' are măsura de $60°$. Fie O şi P intersecţiile dreptelor $A'C$ cu AC', respectiv $B'C$ cu $C'N$.

(a) Să se demonstreze că dreapta AC' este perpendiculară pe planul (OPM).

(b) Să se determine măsura unghiului format de dreapta AP cu planul (OPM).

Mircea Fianu, Bucureşti

Subiectul 4. (a) Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} \geqslant \frac{4(uy + vx)}{(x + y)^2},$$

pentru orice numere reale $u, v, x, y > 0$.

(b) Fie $a, b, c, d > 0$. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{a}{b + 2c + d} + \frac{b}{c + 2d + a} + \frac{c}{d + 2a + b} + \frac{d}{a + 2b + c} \geqslant 1.$$

Traian Tămâian, Carei

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ şi punctele $\{E\} = AD \cap BC$, $\{I\} = AC \cap BD$. Să se arate că triunghiurile EDC şi IAB au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă $AB \parallel CD$ şi $IC^2 = IA \cdot AC$.

Virgil Nicula, Bucureşti