

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – clasa a-V-a
Faza locală – februarie 2008

I. Se dau numerele:

$$x = 2008^2 - 2008 - 2007 ; y = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2009}.$$

- a) Arătați că x este un pătrat perfect;
b) Arătați că y se divide cu 7.

Problemă propusă de Pinteș Terezia - Șc. Poiana Codrului

II. a) Să se determine mulțimile A și B , știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; ii) $A \cap B = \{1, 2, 3\}$; iii) $\text{card}(A - B) \leq 2$.

b) Suma a trei numere naturale este egală cu 285. Împărțind primul număr la al doilea se obține câtul 3 și restul 5. Împărțind al treilea număr la primul se obține același rezultat. Determinați cele trei numere.

Problemă propusă de Pal Rita - Șc. C. Brâncoveanu Satu Mare

III. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor și justificați:

- a) Suma $S = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2008$ are ultima cifră egală cu 3.
b) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2007 < 2 + 4 + 6 + \dots + 2008$.

Problemă propusă de Danci Natalia - Șc. Doba

IV. a) Determinați numărul natural x știind că:

$$100 \cdot \left\{ x - \left[\left(2^{2008} + 2^{2007} + 2^{2006} + 2^{2005} \right) : \left(2^{2005} + 2^{2004} + 2^{2003} + 2^{2002} \right) \right] \right\} = 35000.$$

b) Determinați ultima cifră a numărului

$$n = x^{2008} + 2008^x + (x + 2008)^{x+2008}, \text{ unde } x \text{ este numărul determinat la punctul a).}$$

Problemă propusă de Moiş Anca - Șc. Gr. Moiş Satu Mare

Notă: Toate problemele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore

Punctajul maxim pentru fiecare problemă rezolvată corect este de 7 puncte

La faza județeană se califică elevii care obțin cel puțin 15 puncte.

Inspector de specialitate,
Baciu Nicolae

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – clasa a-VI-a
Faza locală – februarie 2008

I. a) Să se arate că la orice număr de trei cifre \overline{abc} , dacă se adună de două ori cifra sutelor, de două ori cifra zecilor și de două ori cifra unităților se obține un număr divizibil cu 3.

Problemă propusă de Sita Florentina – Șc. Apa

b) Se consideră numărul natural n , care în descompunerea lui în produs de puteri de factori primi are numai factorii $2^x, 5^y, 7^z$. Aflați numărul n , știind că cel mai mare divizor comun al numerelor n și $\frac{11n}{70}$ este 1960.

Problemă propusă de Culic Camelia – Col.Teh. I.I.C.Brătianu Satu Mare

II. În urma unui concurs, toți elevii participanți au fost recompensați astfel: 15% din numărul concurenților au primit premiul I; 30% din restul concurenților au primit premiul II; alți 60 de elevi au primit premiul III și ultimii 59 de elevi au primit numai diplome de participare.

a) Câți elevi au participat la concurs?

b) Câți elevi au primit premiul II ?

III. Suma măsurilor a trei unghiuri adiacente este egală cu 150° . Notând cu x, y, z măsurile celor trei unghiuri și având îndeplinite simultan condițiile:

$$\text{a) } \frac{x}{y} = \frac{a}{b} ; \frac{y}{z} = \frac{b}{c} ; \text{ b) } 3a + b + 6c = 51 ; \text{ c) } a, b, c \text{ sunt numere prime ,}$$

determinați măsurile celor trei unghiuri.

Problemă propusă de Kristof Maria – Șc. Dorolț

IV. a) Într – un plan se consideră 9 drepte distincte și concurente. Arătați că există cel puțin două drepte consecutive care formează un unghi de măsură mai mică sau egală cu $20^\circ 1'$.

Problemă propusă de Baci Nicolae – I.S.J. Satu Mare

b) Pe o dreaptă se consideră punctele E, M, N, C, P, Q, D (în această ordine) astfel încât $[EM] \equiv [MN] \equiv [NC]$; $[CP] \equiv [PQ] \equiv [QD]$ și $ED = 12$ cm.

i) Să se calculeze lungimile segmentelor $[MQ]$ și $[NP]$;

ii) Ce lungime trebuie să aibă segmentul $[EC]$ pentru ca P să fie mijlocul segmentului $[ED]$? Dar pentru ca N să fie mijlocul segmentului $[EP]$?

Problemă propusă de Toth- Vizer Maria – Șc. Nr. 1 Carei

Notă: Toate problemele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore

Punctajul maxim pentru fiecare problemă rezolvată corect este de 7 puncte

La faza județeană se califică elevii care obțin cel puțin 15 puncte.

Inspector de specialitate,
Baci Nicolae

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – clasa a-VII-a
Faza locală – februarie 2008

I. a) Arătați că: $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right], \forall k \in \mathbb{Z}_+^*$.

b) Verificați egalitatea: $\frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9} + \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{19 \cdot 20 \cdot 21}$.

Problemă propusă de Braica Petru – Șc. Gr. Moisiil Satu Mare

II. Se dau numerele raționale:

$$A = \frac{1}{a+b_1} + \frac{2}{a+2b_2} + \frac{3}{a+3b_3} + \dots + \frac{n}{a+nb_n}; \quad B = \frac{b_1}{a+b_1} + \frac{4b_2}{a+2b_2} + \frac{9b_3}{a+3b_3} + \dots + \frac{n^2b_n}{a+nb_n},$$

unde $a, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{Q}_+, n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $\frac{A}{B} = \frac{n}{a}$, iar n este număr par, atunci:

a) Calculați $a \cdot A + B$

b) Arătați că numărul B este natural.

Problemă propusă de Culic Camelia – Col.Teh. I.I.C.Brătianu Satu Mare

III. Fie triunghiul ABC isoscel, cu $AB = AC$. Pe latura $[BC]$ a triunghiului se iau punctele M și N

astfel încât să avem $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NB} = k$.

a) Arătați că $AM = AN$;

b) Determinați în funcție de k valoarea raportului $\frac{MN}{BC}$.

Problemă propusă de Schradi Edit – Șc. Căpleni

IV. Aflați toate triunghiurile ABC cu măsurile unghiurilor exprimate în numere naturale, știind că $m(\sphericalangle A), m(\sphericalangle B), m(\sphericalangle C)$ sunt direct proporționale respectiv cu $k, 2k^2, k^3$, unde $k \in \mathbb{N}^*$.

Problemă propusă de Bud Adrian – Șc. O. Goga Satu Mare

Notă: Toate problemele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore

Punctajul maxim pentru fiecare problemă rezolvată corect este de 7 puncte

La faza județeană se califică elevii care obțin cel puțin 15 puncte.

Inspector de specialitate,
Baciu Nicolae

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – clasa a-VIII-a
Faza locală – februarie 2008

I. a) Arătați că: $\frac{n^2 - (n-1)}{n^4 + n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

b) Calculați suma: $S = \frac{1^2}{1^4 + 1} + \frac{2^2 - 1}{2^4 + 2} + \frac{3^2 - 2}{3^4 + 3} + \dots + \frac{2008^2 - 2007}{2008^4 + 2008}$.

Problemă propusă de Baci Nicolae – I.S.J. Satu Mare

II. a) Să se verifice egalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{361} + \sqrt{363}} = \frac{1}{\sqrt{363} + \sqrt{365}} + \frac{1}{\sqrt{365} + \sqrt{367}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1321} + \sqrt{1323}}.$$

Problemă propusă de Braica Petru – Șc. Gr. Moșil Satu Mare

b) Determinați perechile (x, y) de numere reale cu proprietatea: $|x - 1| + |x + 2| + |y + 3| = 3$.

Problemă propusă de profesori de la C.N."Kolcsey Ferenc.

III. Fie ABCDA'B'C'D' un cub cu muchia de lungime 6 cm. Determinați:

- Măsura unghiului format de dreptele B'C și AD';
- Distanța de la A' la planul (AB'D');
- Măsura unghiului determinat de dreapta AB' și planul (BDD');
- Câte tetraedre regulate există, a căror vârfuri sunt și vârfurile cubului? Precizați care sunt acestea.

Problemă propusă de Nevelics Gyongyver – C.N.K. Ferenc

IV. a) Se dă trapezul ABCD, $AB \parallel CD$. Știind că între lungimile bazelor există relația $CD = 2AB$, să se arate că $AC^2 + BD^2 = BC^2 + CD^2 + DA^2$;

b) Se consideră două segmente oarecare în spațiu, $[AB]$ și $[CD]$, astfel încât:

$$\frac{CA}{CB} + \frac{CB}{CA} + \frac{DA}{DB} + \frac{DB}{DA} = 4.$$

Să se arate că $AB \perp CD$.

Problemă propusă de Baci Nicolae – I.S.J. Satu Mare

Notă: Toate problemele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore

Punctajul maxim pentru fiecare problemă rezolvată corect este de 7 puncte

La faza județeană se califică elevii care obțin cel puțin 15 puncte.

Inspector de specialitate,
Baci Nicolae