CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
“ PETRU MOROŞAN-TRIDENT ”
Ediţia a IX-a , Secţiunea A (M_1), Brăila, 11 - 12. 11. 2011

CLASA a VIII a

1. Fie m, n numere naturale. Arătaţi că :

$$\sqrt{7m+2n}-\sqrt{2m+2n}=\sqrt{2m-n}$$

dacă şi numai dacă $m=n.$

Gazeta Matematică

***Soluţie*:**

Relaţia dată este echivalentă cu

$\sqrt{7m+2n}=\sqrt{2m+2n}+\sqrt{2m-n}\,(1p)\Leftrightarrow 7m+2n=\left(\sqrt{2m+2n}+\sqrt{2m-n}\right)^2(1p)$

$\Leftrightarrow 3m+2n=2\sqrt{4m^2+2mn-2n^2}\,(1p)\Rightarrow 9m^2+6mn+n^2=16m^2+8mn-8n^2\,(1p)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7m^2+2mn-9n^2\,(1p)=0\Leftrightarrow (m-n)(7m+9n)=0,(1p)\Rightarrow m=n(1p)$

2 . Să se arate că :

a) $a^{2011}+a^{2010}+a^{2009}+...+a^2+a+0,9<0,(\forall)\,a\le -1.$

b) $b^{2012}+b^{2011}+...+b+0,5>0,(\forall)\,b\in\mathbb{R}.$

Victoria şi Dan Negulescu

***Soluţie*:**

a) Inegalitatea se scrie $a^{2010}(a+1)+a^{2008}(a+1)+...+a^2(a+1)+a+0,9<0\ (2p)$ şi este adevărată deoarece $a^{2k}>0$ pentru $(\forall)\,a\le -1,$ iar $a+1\le 0$ şi $a+0,9<0.\,(1p)$

b) Inegalitatea se scrie $b^{2012}+b^{2010}(b+1)^2+b^{2008}(b+1)^2+...+b^2(b+1)^2+(b+1)^2>0(3p)$ şi este adevărată $b^{2k}\ge 0$ şi $(b+1)^2\ge 0,$ pentru $k\in\mathbb{N}^*$ şi $b\in\mathbb{R}$ iar $b^{2k}=0$ pentru $b=0$ şi $(b+1)^2=0$ pentru $b=-1.\,(1p)$

3. Fie triunghiul ΔABC şi punctul $D \notin (ABC)$. Considerăm G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor $\Delta ABD, \Delta ADC$ respectiv ΔBCD. Fie G centrul de greutate al ΔABC.

a) Arătaţi că $\left(G_1G_2^{\ 2} + G_1G_3^{\ 2} + G_2G_3^{\ 2}\right)\left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BC^2}\right) \geq 1$. Când are loc egalitate?

b) Calculaţi $\frac{Aria(\Delta G_1G_2G_3)}{\sqrt{Aria(\Delta ABG)\,Aria(\Delta ACG) + Aria(\Delta ABG)\,Aria(\Delta BCG) + Aria(\Delta ACG)\,Aria(\Delta BCG)}}$

Carmen şi Viorel Botea

***Soluţie*:**

a) Fie M mijlocul lui

a) Fie M mijlocul lui $(AD) \Rightarrow \frac{G_1M}{G_1B} = \frac{1}{2} = \frac{G_2M}{G_2C} \Rightarrow G_1G_2 \parallel BC\,(1p) \Rightarrow \triangle MG_1G_2 \sim \triangle MBC \Rightarrow \frac{G_1G_2}{BC} = \frac{MG_1}{MB} =$

$= \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 = \frac{BC}{3}$; analog $G_1G_3 \parallel AC$ şi $G_1G_3 = \frac{AC}{3}$, $G_2G_3 \parallel AB$ şi $G_2G_3 = \frac{AB}{3}$.$(1p)$ Inegalitatea devine:

$\left(\frac{AB^2}{9} + \frac{AC^2}{9} + \frac{BC^2}{9}\right)\left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BC^2}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \left(AB^2 + AC^2 + BC^2\right)\left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BC^2}\right) \geq 9\,(A)(1p)$

din inegalitatea mediilor; avem egalitate dacă $AB = AC = BC$.$(1p)$

b) $\triangle G_1G_2G_3 \sim \triangle ABC$ şi $\frac{Aria(\triangle G_1G_2G_3)}{Aria(\triangle ABC)} = \frac{1}{9}$; $(1p)\, Aria(\triangle ABC) = A \Rightarrow Aria(\triangle ABG) = Aria(\triangle BCG) =$

$= Aria(\triangle ACG) = \frac{Aria(\triangle ABC)}{3}(1p)$ deci raportul cerut este $\frac{\frac{A}{9}}{\sqrt{\frac{A}{3}\frac{A}{3} + \frac{A}{3}\frac{A}{3} + \frac{A}{3}\frac{A}{3}}} = \frac{\frac{A}{9}}{\sqrt{\frac{3A^2}{9}}} = \frac{\frac{A}{9}}{\sqrt{\frac{3A^2}{9}}} = \frac{\frac{A}{9}}{\frac{A\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$.$(1p)$