CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "SEVER AUREL GROZE"

Ediția a II-a, BECLEAN, 16-18 mai 2014

SUBIECTE CLASA a IV-a

1. O cantitate de fructe trebuie pusă în lăzi.
   Dacă în fiecare ladă se pun câte 5 kg, rămân 180 kg.
   Dacă se pun câte 6 kg în fiecare ladă, rămân 20 de lăzi goale şi una cu numai 2 kg.
   Câte lăzi şi câte kg de fructe sunt?

2. 5 pixuri, 5 stilouri şi 6 caiete costă 1216 lei.
   2 pixuri, 3 stilouri şi 7 caiete costă 737 lei.
   3 pixuri, 2 stilouri şi 9 caiete costă 589 lei.
   Câți lei costă un pix?
   Câți lei costă un stilou? Dar un caiet?

3. Câtul împărțirii a două numere este 7, iar restul 2.
   Suma dintre deîmpărțit, împărțitor, cât şi rest este 323.
   Care sunt cele două numere? Se cere şi verificarea soluției.

Iuliana Drăgan G. M. nr. 1/2014

SUBIECTE CLASA a V-a

1. Determinați numerele naturale $\overline{abcd}$, ştiind că $2\cdot\overline{abcd}=(\overline{acd}-2)\cdot 19$.

   G.M. 3/2014

2. Fie $n=\overline{abcdabcd.....abcd}$, unde $\overline{abcd}$ se repetă de k ori.
   ştiind că $\{a,b,c,d\}=\{0,1,3,5\}$, arătați că n nu poate fi pătrat perfect.

3. Se pot scrie cifrele 1,2,3,....,9 pe un cerc, într-o anumită ordine, astfel încât suma oricăror două numere vecine să nu se dividă nici cu 3, nici cu 5, nici cu 7?
   Justificați răspunsul dat.

SUBIECTE CLASA a VI-a

1. Determinați numerele naturale $\overline{abcd}$ cu proprietatea că, împărțind numărul $\overline{abcd}$ la numărul $\overline{dcba}$, se obține câtul 2 şi restul 74. *G.M. 3/2014*

2. Doi elevi joacă un joc folosind două jetoane, pe fiecare jeton fiind înscris un număr mai mare ca 1.
   În cadrul unei partide, fiecare copil primeşte un jeton şi obține un punctaj egal cu numărul înscris pe jetonul său.
   După un număr de n partide jucate $(n \geq 2)$, un elev a acumulat 25 de puncte, iar celălalt 26 de puncte.
   Care sunt numerele înscrise pe fiecare jeton ?

3. În triunghiul ascuțitunghic ΔABC, ducem $AD \perp BC, D \in (BC)$ şi notăm cu M mijlocul laturii $[BC]$. Ştiind că $m(\angle B) = 2 \cdot m(\angle C)$, demonstrați că $AB = 2 \cdot DM$.

SUBIECTE CLASA a VII-a

1. Să se demonstreze că: $\dfrac{a^2}{a^2+2bc}+\dfrac{b^2}{b^2+2ac}+\dfrac{c^2}{c^2+2ab} \geq 1.$

2. Determinați perechile de numere întregi (a,b) cu proprietatea că:
   $$(a^2-b^2)^2 = 1+12b.$$ *G.M. 3/2014*

3. În exteriorul ΔABC, ascuțitunghic, se consideră paralelogramele $ABMM', BCNN', CAPP'$, astfel încât $M \in (CB, N \in (AC, P \in (BA$.
   ştiind că $MB = \sqrt{ac}, CN = \sqrt{ab}, AP = \sqrt{bc}$, unde a,b,c sunt lungimile laturilor ΔABC, sa se demonstreze că:
   a) Dreptele AN', BP', CM' sunt concurente;
   b) Dacă dreptele AN', BP', CM' sunt concurente în centrul cercului înscris în ΔABC, atunci ΔABC este echilateral.

SUBIECTE CLASA a VIII-a

1. Aflați numerele reale x,y care verifică relația: $|(2x - y)^2 - 3x - 2y + 7| + (7 - 3x - 2y)^2 + 3x + 2y = 7$.

2. Arătați că, dacă a,b,c > 0, atunci $\dfrac{a^2-c^2}{b+c}+\dfrac{b^2-a^2}{c+a}+\dfrac{c^2-b^2}{a+b} \geq 0$. *G.M. 1/2014*

3. Fie M un punct aflat în interiorul triunghiului echilateral ABC.
   Dreapta VM este perpendiculară pe planul (ABC), iar din punctul M ducem $MA' \perp VA, MB' \perp VB, MC' \perp VC$, unde $A' \in (VA), B' \in (VB), C' \in (VC)$.
   Să se demonstreze că [VA], [VB] şi [VC] sunt laturile unui triunghi asemenea cu $\Delta A'B'C'$.

Barem de notare şi corectare

<u>CLASA a IV-a</u>

1.	Dacă y este numărul de lăzi, atunci cantitatea de fructe în cele două situații este: 5y+180 şi 6(y-20-1)+2 Cantitatea de fructe fiind aceeaşi avem: 5y+108=6y-120-6+2 Adunând pe rând în ambii membrii ai egalității 120 şi apoi 6 obținem 5y+306=6y+2. Scăzând 2 şi apoi 5y în ambii membrii obținem y=304 Cantitatea de fructe este 304x5+180=1700 (kg)	2 p 2p 2 p 1 p
2.	1) 5p……….5s………. 6c…………..1216 lei 2) 2p………..3s………..7c…………... 737 lei 3) 3p………..2s………..9c ………… 589 lei Adunând relațiile 2) şi 3) obținem: 4) 5p ………5s………..16c………1326 lei Scăzând 1) <u>5p ………5s………....6c ……...1216 lei</u> | | 10 c=110 lei, de unde 1 caiet costă 11 lei Eliminând prețul caietelor din primele două relații 5p ……………..5s…………1150 lei |x2 2p ……………..3s……………660 lei|x5 ___________________________________ 10p ………………10s ………………2300 lei 10p ………………15s ………………3300 lei ___________________________________ | 5s = 1000 lei 1 stilou costă 1000:5 =200lei În relația 2) 2 pixuri costă 660-600=60 lei 1 pix costă 60:2=30 lei Răspuns: 1 pix costă 30 lei 1 stilou costă 200 lei 1 caiet costă 11 lei	 2 p 1 p 1 p 1p 1 p 1 p
2.	D=Ix7+2, 2<I D+I+C+R=323 7I+2+I+7+2=323 8I+11=323 8I=312 de unde I=39 D=273+2=275 Verificare 275=39x7+2 275=273+2	2 p 1 p 1 p 1 p 1 p 1 p

4. *Determinaţi numerele naturale* $\overline{abcd}$*, ştiind că* $2 \cdot \overline{abcd} = (\overline{acd} - 2) \cdot 19$.

G.M. 3/2014

Soluție:

2· (1000a+100b+10c+d)=(100a+10c+d-2)·19 1p

100a+200b+38=170c+17d => u.c.(17d)=8 => d=4 1p

100a+200b=170c+30 => 10a+20b=17c+3 =>

u.c.(17c+3)=0 => 1p

u.c.(17c)=7 => c=1 1p

10a+20b=20 => a=2 şi b=0 (a fiind nenul din enunț) 2p

Numărul căutat este 2014. 1p

5. *Fie* $n = \overline{abcdabcd.....abcd}$*, unde* $\overline{abcd}$ *se repetă de k ori.*
Știind că $\{a, b, c, d\}$ *={0,1,3,5}, arătați că n nu poate fi pătrat perfect.*

Soluție :

Dacă u.c.(n)=3 => n nu e pătrat perfect 1p

Dacă u.c.(n)=0 => n se termina in nr. impar de zerouri => nu e pătrat perfect 2p

Dacă u.c.(n)=5, atunci ultimele 2 cifre pot fi 05, 15 sau 35 =>

$n \vdots 5$, dar nu si cu 25 => n nu e pătrat perfect 2p

Dacă u.c.(n)=1, atunci ultimele 2 cifre pot fi 31, 51 => n=M4+3 =>

n nu e pătrat perfect 1p

sau ultimele 2 cifre sunt 01=> ultimele 3 cifre pot fi 301 sau 501=>

n=M8+5 => n nu e pătrat perfect 1p

6. *Se pot scrie cifrele 1,2,3,....,9 pe un cerc, într-o anumită ordine, astfel încât suma oricăror două numere vecine să nu se dividă nici cu 3, nici cu 5, nici cu 7?*

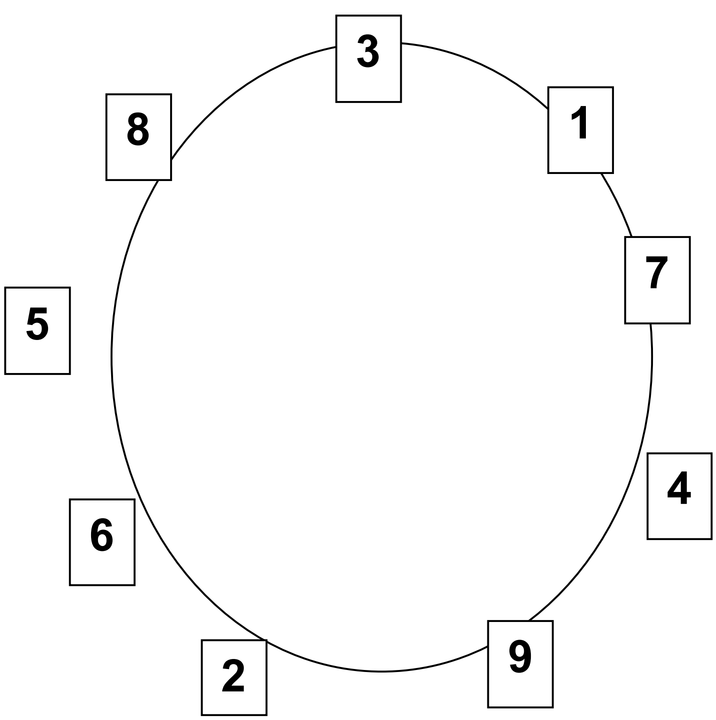
Solutie:

Da, se poate. Se exemplifica prin varianta de mai jos.

Răspunsul afirmativ, fară justificare 1p

Exemplul 5p

Verificarea condițiilor ipotezei (sumele nedivizibile cu 3,5,7) 1p



Subiecte şi Barem - Clasa a VI-a -

4. $\overline{abcd}=2\cdot\overline{dcba}+74$ => 2a+4 are ultima cifra d, d – par, a≥2d 2p.

⇨ I. 2a+4=d nu se poate, a≥2d

II. 2a+4=d+10 => 2a=d+6, verifica doar d=2, a=4 2p.

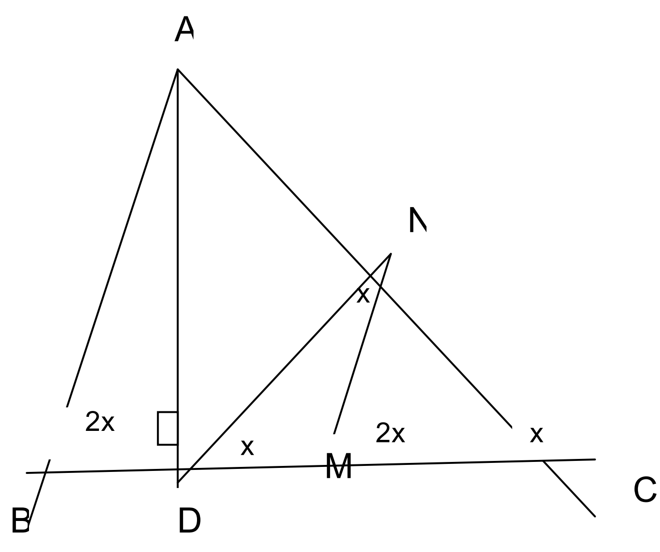
⇨ 80b=190c+80 => 8|c => verifica doar c=0, b=1 => 4102 solutie 2p.

III. 2a+4=d+20 => a=8,d=0 si a=9, d=2 care nu verifica 1p.

Doi elevi joaca un joc folosind doua jetoane, pe fiecare jeton fiind inscris un numar mai mare ca 1. In cadrul unei partide, fiecare copil primeste un jeton si obtine un punctaj egal cu numarul inscris pe jetonul sau.
Dupa un numar de n partide jucate $(n \geq 2)$, un elev a acumulat 25 de puncte, iar celalalt 26 de puncte. Care sunt numerele inscrise pe fiecare jeton ?

5. Fie a si b cele 2 numere inscrise pe jetoane, x numarul de jetoane avand inscris nr. a => n-x va fi numarul de jetoane avand inscris nr. b =>
xa+(n-x)b=25 si (n-x)a+xb=26 1p
⇨ n(a+b)=51=3·17, dar a,b,n≥2 => a+b=17, n=3 3p
⇨ (3-x)a+xb=26, unde 0≤x≤3
x=0, x=3 se ajunge usor la o contradictie 1p
x=1 => 2a+b=26 si a+2b=25 => a=9, b=8 1p
x=2 => a+2b=26 si 2a+b=25 => a=8, b=9 1p

6.



Notam cu x masura unghiului C. Fie N mijlocul lui [AC]

⇨ MN linie mijlocie in ΔABC => MN=$\frac{AB}{2}$, MN□AB 1p

DN mediana in ΔADC => DN=AN=NC 1p
MN□AB, m(<ABC)=2x => m(<NMC)=2x 2p
ΔDNC isoscel => m(<NDM)=x, dar <NMC este <exterior ΔDMN
⇨ m(<NDM)=x=m(<DNM) => ΔDMN isoscel 2p

⇨ DM=MN=$\frac{AB}{2}$ => AB=2DM 1p

4. $2bc \le b^2 + c^2 \Rightarrow \dfrac{a^2}{a^2+2bc} \ge \dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$ si analog 4p

⇨ $\dfrac{a^2}{a^2+2bc} + \dfrac{b^2}{b^2+2ac} + \dfrac{c^2}{c^2+2ab} \ge \dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2} = 1$ 3p

5. $1+12b=k^2 \Rightarrow b=\dfrac{k^2-1}{12}$; $k\neq 0$ 1p

I. $a^2-b^2=k \Rightarrow a^2 = (\dfrac{k^2-1}{12})^2 + k = x \Rightarrow x$ – patrat perfect

Daca $(\dfrac{k^2-1}{12})^2 < (\dfrac{k^2-1}{12})^2 + k < (\dfrac{k^2-1}{12}+1)^2 \Rightarrow x$ nu e p.p.

inegalitatea din dreapta $\Leftrightarrow k<\dfrac{k^2-1}{6}+1 \Leftrightarrow k(6-k)<5 \Leftrightarrow k\le 0$ sau $k\ge 6$ ceea ce nu convine

⇨ $k \in \{1,2,3,4,5\}$; convine $k=5 \Rightarrow b=2$, $a=\pm 3$; $k=1 \Rightarrow b=0$, $a=\pm 1$ 3p

II. $a^2-b^2=-k \Rightarrow a^2=b^2-k=y \Rightarrow y$ – p.p.

Daca $(\dfrac{k^2-1}{12}-1)^2 < (\dfrac{k^2-1}{12})^2 - k < (\dfrac{k^2-1}{12})^2 \Rightarrow y$ nu e p.p.

Inegalitatea din stanga $\Leftrightarrow k<\dfrac{k^2-1}{6}-1 \Leftrightarrow 7<k(k-6) \Leftrightarrow k\le 0$ sau $k\ge 8$ ceea ce nu convine

⇨ $k \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$; convine $k=7 \Rightarrow b=4, a=\pm 3$ 3p

6. a) Notam $AN'\cap BC=\{A'\}$; $BP'\cap AC=\{B'\}$ si $CM'\cap AB=\{C'\}$

$\dfrac{BA'}{A'C} = \dfrac{BN'}{AC} = \dfrac{\sqrt{ab}}{b}; \dfrac{CB'}{B'A} = \dfrac{CP'}{AB} = \dfrac{\sqrt{bc}}{c}; \dfrac{AC'}{C'B} = \dfrac{AM'}{BC} = \dfrac{\sqrt{ac}}{a} \Rightarrow$ 2p

$\dfrac{BA'}{A'C} \cdot \dfrac{CB'}{B'A} \cdot \dfrac{AC'}{C'B} = 1 \Rightarrow AN', BP', CM'$ concurente (Ceva) 2p

b) Daca $AA'\cap BB'\cap CC'=\{I\} \Rightarrow \angle BAA' \equiv \angle A'AC \Rightarrow \angle BAA' \equiv \angle BN'A$

⇨ $c = \sqrt{ab} \Rightarrow c^2=ab$. Analog $a^2=bc$ si $b^2=ac$ 2p

⇨ $a=a = \dfrac{c^2}{b} \Rightarrow b^2 = \dfrac{c^2}{b}\cdot c \Rightarrow c^3 = b^3 \Rightarrow c = b \Rightarrow a = b = c \Rightarrow \Delta ABC$ echilateral 1p

Subiecte si barem - Clasa a VIII-a -

1. $|(2x-y)^2-(3x+2y-7)|+(3x+2y-7)^2=-(3x+2y-7) \Rightarrow 3x+2y-7\le 0$ 1p
   - ⇨ $(2x-y)^2-(3x+2y-7)\ge 0 \Rightarrow$
   - ⇨ ecuatia devine $(2x-y)^2-(3x+2y-7)+(3x+2y-7)^2=-(3x+2y-7)$ 2p
   - ⇨ $(2x-y)^2+(3x+2y-7)^2=0 \Rightarrow 2x-y=0$ si $3x+2y-7=0$ 2p

   sistem care admite solutiile $x=1$, $y=2$. 2p

2. $\frac{a^2-c^2}{b+c}+\frac{b^2-a^2}{c+a}+\frac{c^2-b^2}{a+b}=$

$$\frac{a^2-b^2}{b+c}+\frac{b^2-c^2}{b+c}+\frac{b^2-c^2}{c+a}+\frac{c^2-a^2}{c+a}+\frac{c^2-a^2}{a+b}+\frac{a^2-b^2}{a+b}=$$

$$\frac{a^2-b^2}{b+c}+b-c+\frac{b^2-c^2}{c+a}+c-a+\frac{c^2-a^2}{a+b}+a-b=\frac{a^2-b^2}{b+c}+\frac{b^2-c^2}{c+a}+\frac{c^2-a^2}{a+b} \quad 3p$$

$$2\left(\frac{a^2-c^2}{b+c}+\frac{b^2-a^2}{c+a}+\frac{c^2-b^2}{a+b}\right)=\frac{a^2-c^2}{b+c}+\frac{b^2-a^2}{c+a}+\frac{c^2-b^2}{a+b}+\frac{a^2-b^2}{b+c}+\frac{b^2-c^2}{c+a}+\frac{c^2-a^2}{a+b}=$$

$$(a^2-b^2)\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+c}\right)+(b^2-c^2)\left(\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b}\right)+(c^2-a^2)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}\right)= \quad 3p$$

$$\frac{(a-b)^2(a+b)}{(a+c)(b+c)}+\frac{(b-c)^2(b+c)}{(c+a)(a+b)}+\frac{(c-a)^2(c+a)}{(a+b)(b+c)}\ge 0 \ (A) \quad 1p$$

3. Notam $AB=l$.

   $VA'\cdot VA=VB'\cdot VB=VC'\cdot VC=VM^2 \Rightarrow \Delta VA'B' \sim \Delta VBA \Rightarrow \frac{VA'}{A'B'}=\frac{VB}{AB} \Rightarrow A'B'=\frac{VA'\cdot l}{VB}$ 3p

   $\Delta VA'C' \sim \Delta VCA \Rightarrow \frac{VA'}{A'C'}=\frac{VC}{AC} \Rightarrow VA'=\frac{VC\cdot A'C'}{l} \Rightarrow A'B'=\frac{VC\cdot A'C'\cdot l}{VB\cdot l}=\frac{VC\cdot A'C'}{VB}$ 2p

   - ⇨ $\frac{A'B'}{VC}=\frac{A'C'}{VB}$ si analog
   - ⇨ $\frac{A'C'}{VB}=\frac{B'C'}{VA} \Rightarrow \Delta A'B'C'$ este asemenea cu triunghiul de laturi VC,VA, respectiv VB.

   2p