Clasa a IV-a

Problema 1

Numărul 20 se scrie ca produs de o mie de numere naturale. Aflaţi cea mai mică valoare a sumei celor o mie de numere.

Prof. Nicolaie Tălău, C. N. "Carol I", Craiova

Problema 2

Pe o masă sunt 51 de jetoane inscripţionate cu numerele de la 1 la 51, aşezate cu faţa în jos. Matei ia 25 de jetoane şi îi spune lui Ştefan: "Oricum ai lua 7 jetoane, suma numerelor inscripţionate pe ele va fi un număr impar". Aflaţi suma numerelor de pe jetoanele luate de Matei.

* * *

Problema 3

În fiecare din cele nouă căsuţe ale unui pătrat este înscrisă cifra zero ca în figura următoare. Se alege la întamplare un pătrat al pătratului mare, alcătuit din patru căsuţe alăturate şi se măreşte fiecare număr din pătratul ales cu o unitate.

0	0	0
0	0	0
0	0	0

4	x	9
y	z	u
2	v	w

Se repetă operaţia cu alt pătrat alcătuit din patru căsuţe alăturate sau chiar cu acelaşi pătrat. După 20 de paşi (o alegere este un pas) se obţine pătratul din ultima figură.
Aflaţi numerele *x, y, z, u, v, w*.

* * *

Clasa a V-a

Problema 1

Determinați numerele naturale prime $p, p \geq 3$, cu proprietatea că numerele naturale $p+2, 2p+1, p^2-6$ sunt simultan prime.

„Cardinal"
Prof. Raluca Ciurcea, C.N. „Carol I", Craiova

Problema 2

Se dau mulțimile $A=\{3^x, 3^{x+y}, 3^{x+2y}\}$ și $B=\{9, 81, 3^{2x-y}\}$, unde x și y sunt numere naturale nenule. Să se afle x și y astfel încât mulțimile să fie egale.

„Țițeica"
Prof. Cristian Schneider, C.N. „Carol I", Craiova

Problema 3

Să se determine numerele naturale n și $\overline{abcd}$ scrise în baza 10, știind că $\overline{abcd} \vdots 19$ și $n^4 = \overline{acdb}$.

Prof. Monica Stanca, C.N. „Carol I", Craiova

Clasa a VI-a

Problema 1

Să se determine numerele naturale nenule m şi n astfel ca numărul $2^{2n+1}+m!$ să fie pătrat perfect, unde $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m$.

„Gazeta Matematică”

Problema 2

Să se determine numerele întregi a, b, c ştiind că $a^2 - a + (9 - b^2)^2 + |1 - c^2| \leq 0$.

***

Problema 3

Pe dreapta *d* se consideră punctele *O,A,B* (*A* între *O* şi *B*). Punctele *M* şi *N* sunt de o parte şi de alta a dreptei *d*. Fie [*OE* şi [*AF* bisectoarele unghiurilor *MOA* şi *NAB*. Să se arate că *OE* este perpendiculară pe *AF* dacă şi numai dacă unghiurile *MOA* şi *NAB* sunt suplementare.

***

Clasa a VII-a

Problema 1

Fie x si y numere reale cu $y \neq -1$. Arătaţi că $x^2 - y^2 = 2(x+y)$ dacă şi numai dacă

$$\frac{x-1}{y+1} \in \{-1, 1\}.$$

Gazeta Matematică

Problema 2

Demonstraţi că numărul $a = \sqrt{n^3 + 14n + 14}$ este iraţional oricare ar fi n număr natural.

Prof. Constantin Basarab, C.N. Carol I, Craiova

Problema 3

a) Se dă trapezul ABCD cu AB||CD, m(Â)=30° şi AD=DC=BC. Pe semidreapta [AD se consideră punctul E astfel încât AE=AB. Dacă BE=4cm, calculaţi perimetrul trapezului ABCD.

b) Fie triunghiul isoscel ABC cu AB=AC si m(Â)=30°. Pe latura (AB) se ia punctul D astfel încât $BC = AD\sqrt{2}$. Determinaţi măsura unghiului BDC.

Prof. Constantin Basarab, C.N. Carol I, Craiova

Clasa a VIII-a

Problema 1

a) Arătaţi că

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b),\quad (\forall)a,b\in\mathbb{R}.$$

b) Arătaţi că ecuaţia

$$(3x^2-x+1)^3+(x^2+x+3)^3=64(x^2+1)^3$$

nu are soluţii în mulţimea numerelor reale.

Revista de matematică Ţiţeica

Problema 2

Fie $A=\{[n\sqrt{3}]\,|\,n\in\mathbb{N}^*\}$ şi $B=\left\{\left[\frac{n}{2}(\sqrt{3}+3)\right]\,\middle|\,n\in\mathbb{N}^*\right\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x. Arătaţi că:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}+3}=1$

b) $A\cap B=\emptyset$.

Prof. Nicolaie Tălău, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 3

Pe planul $\triangle ABC$ se ridică de aceeași parte a planului perpendicularele AA', BB'și CC' astfel încât $[AA']\equiv[BC]$, $[BB']\equiv[AC]$și $[CC']\equiv[AB]$. Dacă $M\in(CC')$, H este ortocentrul $\triangle ABC$, *H’* este ortocentrul $\triangle MAB$ iar O este centrul cercului circumscris $\Delta A'B'C'$, arătaţi că:

a) $HO\perp(A'B'C')$

b) $HH'\perp(MAB)$.

Revista de matematică Ţiţeica

Soluţii şi barem de corectare clasa a IV-a

Problema 1

$20 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{999\ de\ ori} \cdot 20, \quad \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{999\ de\ ori} + 20 = 1019$ ………………..………........……..**1,5p**

$20 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{998\ de\ ori} \cdot 2 \cdot 10, \quad \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{998\ de\ ori} + 2 + 10 = 1010$ ………………........………....**1,5p**

$20 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{998\ de\ ori} \cdot 4 \cdot 5, \quad \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{998\ de\ ori} + 4 + 5 = 1007$ ………………...……........…......**1,5p**

$20 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{997\ de\ ori} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5, \quad \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{997\ de\ ori} + 2 + 2 + 5 = 1006$ ..…………………........……..**1,5p**

Concluzia ……………………………………………………………………………....…...**1p**

Problema 2

Pe masă au mai rămas cel mult 6 jetoane având numerele inscripţionate pe ele pare. Altfel se pot alege 7 jetoane având numerele inscripţionate pe ele pare, deci şi suma va fi pară, ceea ce nu convine. ....**2 p**

În particular, se obţine că cel puţin 20 dintre cele 26 de jetoane rămase pe masă au inscripţionate pe ele numere impare. Dacă cel puţin un jeton are inscripţionat pe el un număr par, atunci alegând acest jeton şi încă 6 care au inscripţionate pe ele numere impare, obţinem 7 jetoane cu suma pară, ceea ce nu convine. Am arătat că toate cele 26 de jetoane rămase pe masă au inscripţionate pe ele numere impare. ....**3 p**

Matei a luat cele 25 de jetoane inscripţionate cu numere pare, deci suma numerelor este:

$2 + 4 + \cdots + 50 = 2(1 + 2 + \cdots + 25) = 25 \cdot 26 = 650$...**2 p**

Problema 3

Denumim pătratele format din patru căsuţe alăturate, pătrate 2x2.

Căsuţa care îl conţine pe z se află în toate pătratele 2x2, deci $z = 20$. **2p**

Pătratul 2x2 stânga sus este ales de 4 ori, pătratul 2x2 stânga jos este ales de 2 ori, iar pătratul 2x2 dreapta sus este ales de 9 ori, deci pătratul 2x2 dreapta jos este ales de $20 - 4 - 2 - 9 = 5$ ori, deci $w = 5$. **1p**

Căsuţa care îl conţine pe x se găseşte în pătratele 2x2 stânga sus şi dreapta sus,

deci $x = 4 + 9 = 13$. …………………………………...**1p**

În mod analog, deducem că $y = 4 + 2 = 6$, $u = 9 + 5 = 14$, $v = 2 + 5 = 7$. **3p**

Soluţii şi barem de corectare clasa a V-a

Problema 1

Observăm că $p = 3, p = 5$ verifică cerințele problemei și demonstrăm că acestea sunt singurele cu această proprietate……………………………………. …………………………………………**2p**

Pentru $p > 5$ prim, resturile pe care le poate da acesta prin împărțire la 5 sunt 1,2,3,4 ...……..… **1p**

Dacă restul pe care îl dă prin împărțire la 5 este 1 sau 4, atunci $p^2 - 6 > 43$ este multiplu de 5, deci nu este prim **2p**

Dacă restul pe care îl dă prin împărțire la 5 este 2, atunci $2p + 1 > 11$ este multiplu de 5, deci nu este prim.. **1p**

Dacă restul pe care îl dă prin împărțire la 5 este 3, atunci $p + 2 > 7$ este multiplu de 5, deci nu este prim.. **1p**

Problema 2

Deoarece A=B, produsul elementelor din cele două mulțimi este același.

$3^x \cdot 3^{x+y} \cdot 3^{x+2y} = 3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^{2x-y}$ **1p**

$3x + 3y = 6 + 2x - y$ **1p**

$x + 4y = 6$ **1p**

$y = 0$, rezultă $x = 6$, dar elementele lui A sunt toate egale cu 3^3, imposibil …………………… **1p**

$y = 1$, rezultă $x = 2$, iar $A = \{3^2, 3^3, 3^4\} = B$ **1p**

$y \geq 2$, rezultă $4y \geq 8 > 6$, nu e soluție ………………………………………………..…… **1 p**

Finalizare, singura soluție este $x = 2$ și $y = 1$ ………………….……………………………… **1p**

Problema 3

$5^4 = 625$ și 10^4=10000 nu au patru cifre ……..………………………………………………... **1p**

Din $n^4 = \overline{acdb}$ rezultă $n \in \{6,7,8,9\}$ …….……………………………………………... **1p**

Pentru $n = 6$, avem $\overline{acdb} = 1296$, iar $\overline{abcd} = 1629$ nu este divizibil cu 19 …………………… **1p**

Pentru $n = 7$, avem $\overline{acdb} = 2401$, iar $\overline{abcd} = 2140$ nu este divizibil cu 19 ……..............….… **1p**

Pentru $n = 8$, avem $\overline{acdb} = 4096$, iar $\overline{abcd} = 4609$ nu este divizibil cu 19 …………………… **1p**

Pentru $n = 9$, avem $\overline{acdb} = 6561$, iar $\overline{abcd} = 6156 = 19 \cdot 324$ este divizibil cu 19 …………… **1p**

Finalizare, singura soluție este $n = 9$ și $\overline{abcd} = 6156$ ……………………………….……… **1p**

Soluţii şi barem de corectare clasa a VI-a

Problema 1

Ultima cifră a numărului 2^{2n+1} poate fi 2 sau 8 .... **1p**
Dacă $m \geq 5$, atunci ultima cifră a numărului $m!$ este 0.. **1p**
Deci ultima cifră a numărului $2^{2n+1} + m!$ este 2 sau 8 şi deci, acesta nu poate fi pătrat perfect $\Rightarrow$ $m < 5$.. **1p**
Analiza cazurilor $m = 2, m = 3, m = 4$.. **3p**
Soluţie $m = 1, n = 1$.. **1p**

Problema 2

$a^2 - a \geq 0$ pentru orice $a \in \mathbb{Z}$.. **1p**
$(9 - b^2)^2 \geq 0$ $și$ $|1 - c^2| \geq 0$ pentru orice $b, c \in \mathbb{Z}$.. **1p**
Conform proprietăţii de antisimetrie, obţinem că $a^2 - a + (9 - b^2)^2 + |1 - c^2| = 0$............ **1p**
De unde rezultă că $a^2 - a = (9 - b^2)^2 = |1 - c^2| = 0$.. **1p**
Finalizare: $a \in \{0,1\}, b \in \{-3,3\}$ $și$ $c \in \{-1,1\}$... **3p**

Problema 3

Fie P intersecţia dintre $[OE$ şi $[AF$.
„⇒” Presupunem că $OE \perp AF$.
Dacă $m(\sphericalangle MOE) = m(\sphericalangle AOE) = x$, atunci $90^{\circ} - x = m(\sphericalangle PAO) = m(\sphericalangle BAF)$. ……............ **2p**
Deci $m(\sphericalangle BAN) = 180^{\circ} - 2x \Rightarrow$ unghiurile *MOA* şi *NAB* sunt suplementare……..................... **2p**
„⇐” Fie unghiurile *MOA* şi *NAB* suplementare.
Dacă $m(\sphericalangle MOA) = 2x$ atunci Deci $m(\sphericalangle BAN) = 180^{\circ} - 2x$. …………………...................... **1p**
$m(\sphericalangle BAF) = 90^{\circ} - x = m(\sphericalangle PAO)$. Dar $m(\sphericalangle POA) = x$. ……... **1p**
Atunci $m(\sphericalangle PAO) = 90^{\circ} \Rightarrow OE \perp AF$……... **1p**

Soluţii şi barem de corectare clasa a VII-a

Problema 1

$x^2 - y^2 = 2x + 2y \Leftrightarrow$ **1p**

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow$ **1p**

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = (y+1)^2 \Leftrightarrow$ **2p**

$\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{y+1}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$ **1,5p**

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{y+1} \in \{-1, 1\}$ **1,5p**

Problema 2

$n^3 + 14n + 14 = n^3 - n + 15n + 14 = n(n-1)(n+1) + 15n + 12 + 2$ **2p**

$n(n-1)(n+1) \vdots 3$ **2p**

$a = \sqrt{3k+2}$ **1p**

$3k + 2$ nu este pătrat perfect.. **2p**

Problema 3

a)

Triunghiul CBE dreptunghic isoscel **1,5p**

$BC = CD = DA = 2\sqrt{2}$ **1p**

$P_{ABCD} = 2\sqrt{6} + 8\sqrt{2}\,cm$ **1p**

b)

Fie E în interiorul triunghiului ABC astfel încât $ADEC$ să fie trapez isoscel ($DE \parallel AC$)….. **1p**

$BC = EC\sqrt{2}$ şi $m(\sphericalangle ECB) = 45^\circ \Rightarrow$ triunghiul EBC este dreptunghic isoscel................ **1,5p**

$m(\sphericalangle EDC) = 15^\circ$.. **0,5p**

$m(\sphericalangle BDC) = 45^\circ$.. **0,5p**

Soluţii şi barem de corectare clasa a VIII-a

Problema 1

a).. **2p**

b)Dacă $a=3x^2-x+1$ şi $b=x^2+x+3$, ecuaţia devine $ab(a+b)=0$ **2p**

$a=0 \Rightarrow 3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{2}=0$(Contradicţie)..**1p**

$b=0 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}=0$ (Contradicţie)……………………..…..…………………………**1p**

$a+b=0 \Rightarrow 4\left(x^2+1\right)=0$ (Contradicţie)…………………………..………..……………………**1p**

Problema 2

a).. **2p**

b)Presupunem prin reducere la absurd că $\exists m,n \in N^*$ astfel încât

$\left[n\sqrt{3}\right]=\left[m\frac{\sqrt{3}+3}{2}\right]=k$. Observăm că $n\sqrt{3}, m\frac{\sqrt{3}+3}{2} \in R \setminus Q$ **2p**

$k<n\sqrt{3}<k+1,\ k<m\frac{\sqrt{3}+3}{2}<k+1$... **1p**

Se înmulţesc cele două relaţii cu $\frac{1}{\sqrt{3}}$ respectiv $\frac{2}{\sqrt{3}+3}$ și se adună. Se obţine $k<m+n<k+1$ (Contradicţie) **2p**

Problema 3

a) $OA' \equiv OC'$ şi $BA' \equiv BC' \Longrightarrow BO$ este inclusă în planul mediator al segmentului $[A'C']$. Deducem că $BO \perp A'C'$..**1p**

$BH \perp A'C'$……..……………………..……. **1p**

$A'C' \perp HO$ …………………………..…..…**0.5p**

Analog $A'B' \perp HO$, deci $HO \perp \left(A'B'C'\right)$……………………...………………………….... **1p**

b)Fie D piciorul perpendicularei din C pe AB. Atunci $MD \perp AB$..**0.5p**

$DA \times DB = DH \times DC$ şi $DA \times DB = DH' \times DM$ rezultă $\Delta DH'H \approx \Delta DCM$………...…………...... **1.5p**

$m(\sphericalangle DH'H)=m(\sphericalangle DCM) \Longrightarrow MH' \perp MD$..........................…………………………………..…**0.5p**

Dar $HH' \perp AB \Rightarrow HH' \perp \left(MAB\right)$…………………………..……….......................…….**1p**