CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA" EDIȚIA A XI-A

BĂILEȘTI, 22 MARTIE 2014

CLASA a IV-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1. În fiecare vară, elevii unui club sportiv merg în cantonament pentru 2 luni la munte. Cât reprezintă acest timp dintr-un an?

a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{12}$; c) $\frac{1}{6}$; d) $\frac{1}{4}$

2. Știind că produsul a 7 numere este 11, află suma numerelor?

a) 16 b) 6 c) 17 d) 7

3. La un joc, alături de Marian participă la fel de multe fete ca şi băieţi. Colega lui, Ina, are de două ori mai mulţi colegi, decât colege. Câţi copii participă la joc ?

a) 5 b) 7 c) 8 d) 9

4. Care este numărul care face adevărată relaţia: a: 15 = 15 rest 14?

a) 239 b) 1239 c) 225 d) nu se poate afla

5. Cu cât trebuie micşorată suma dintre cel mai mic număr de 4 cifre diferite şi cel mai mare număr natural de 2 cifre pentru a obţine cel mai mare număr de 3 cifre?

a) 122; b) 222; c) 1023; d) 123.

Probleme propuse de: prof. Vulpe Veronica Lavinia, C. N."Frații Buzești", Craiova, Dolj

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 notează pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (20 puncte)

a) Peste 5 ani, Mihai ar avea o cincime din vârsta de acum a bunicului său. Acum ei au împreună 67 ani. Câţi ani va avea bunicul atunci când Mihai va avea dublul vârstei de acum?

prof. Vulpe Veronica Lavinia, C. N."Frații Buzești", Craiova, Dolj

b) Într-o cutie sunt bile albe, portocalii și negre. Se stie că 35 dintre ele nu sunt negre, iar 43 nu sunt albe. Daca numarul bilelor negre este triplul numărului de bile albe, aflați câte bile de fiecare culoare sunt în cutie.

prof. Pătru Silvia, Calafat

Problema 2 (20 puncte)

Determinaţi toate numerele naturale de două cifre a căror jumătate este cu 27 mai mare decât semisuma cifrelor.

Silvia Popescu, prof.C. N. "Elena Cuza" Craiova, Sfera matematicii nr 20-21

Timp de lucru: 2 ore . Din oficiu: 10 puncte

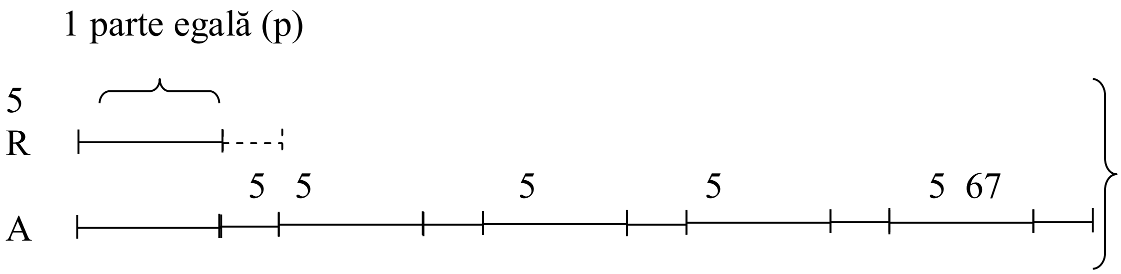
<u>*Clasa a IV-a*</u>

Partea I (5 x 10 p.)

1. c); 2. c); 3. b); 4. a); 5. d)

Partea a II-a

1)a)



desen ………………………………………………………………3p

5 x 5 = 25 ………………………………………………………......1p

67 – 25 = 42 (6p)…………………………………………………......1p

42 : 6 = 7ani are nepotul……………………………………………..2p

7 + 5 = 12ani ar avea nepotul peste 5 ani……..…………..………….1p

12 x 5 = 60 ani are bunicul……………………………..…………..2p

60+ 7 = 67 ani va avea bunicul când Mihai va avea dublul vârstei de acum…3p

b) Notăm cu *a*, *p* și *n* numărul bilelor albe, portocalii respectiv negre aflate în cutie

Din enuntul problemei avem :

p+a =35 (1) ; p+n =43 (2) și n=3 · a (3)... 2p

Punând $n=3\cdot a$ in egalitatea (2),obtinem $p+3\cdot a = 43$ 2p

Ținând seama și de (1), scriem p+a +2 · a =43,deci 35 +2 · a =43......................................2p

Se afla a=4 bile albe..2p.

Obținem, ținând cont de relația (3) , n= 12 bile negre si apoi p=31 bile portocalii 2p

2)

$\overline{ab}$: 2 = 27 + (a +b):2 ……………………………………………..……2p

$\overline{ab}$ = 54 + a + b...…………………………………………………..….2p

10 a+ b = 54 + a + b……………………………………..…………….....5p

10 a =54……………………………………………………………..…..3p

a = 6………………………………..……………….………………......……3p

b = orice cifră pară, adică 0, 2, 4, 6, 8…………………………….….……....3p

Numerele căutate sunt: 60, 62, 64, 66, 68…………………………………....2p

NOTĂ: Orice altă modalitate corectă de rezolvare se acceptă şi se punctează corespunzător.

CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICĂ „SFERA” EDIȚIA A XI-A

BĂILEȘTI, 22 MARTIE 2014

CLASA a V-a

Partea I (50 puncte)
Pentru întrebările 1-5 scrieţi pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Ordinea crescătoare a următoarelor numere: $A = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots .. +99 \cdot 100$, $B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 104^2$, $C = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3$ este:

a) A, B, C; **b)** C, A, B; **c)** C, B, A; **d)** B, C, A

2. Numărul $B = 5^n \cdot 7^{n+1} + 7^n \cdot 5^{n+1} + 17 \cdot 35^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, este divizibil cu:
a)31; **b)** 29; **c)**30; **d)**28.

3.Numărul divizorilor naturali ai numărului $A = 2^{n+1} \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^{n+1} + 6^{n+1}$, unde n număr natural nenul, este:
a)$2(n+1)$; **b)**$2(n+1)^2$ **c)**$11n$; **d)**$2n+11$.

4.Numărul submulțimilor multimii: $A = \{3,6,9,12, \ldots ,93\}$ este:
a)31; **b)** 2^{93} ; **c)** 2^{31}; **d)** 93^2

5.Se dă șirul de numere 3; 22; 59; 114; 187;…..Următorii 2 termeni ai șirului sunt:
a)193 și 201; **b)** 278 și 293; **c)** 313 și 387; **d)** 278 și 387

Probleme propuse de prof. Nicolae Ivășchescu, Craiova

Partea a II-a (40 puncte)
Pentru problemele 1 şi 2 scrieţi pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (20 puncte)
Aflați numerele natural a, b, c știind că sunt îndeplinite simultan următoarele condiții:

i) $2011a+b+c=2016$
ii) $a+2011b+c=4026$
iii) $a+b+ 2011c=6036$.

Prof. Nicolae Ivășchescu, Craiova

Problema 2 (20 puncte)
Fie n un număr natural cu 2009 cifre. Să se afle suma cifrelor numărului $\underbrace{99 \ldots 9}_{2009\ ori} \cdot n$.

Prof. Gheorghe Stoica, Petroșani, ,,Sfera Matematicii” nr.19

Timp de lucru: 2 ore 30 minute. Din oficiu: 10 puncte

CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICĂ „SFERA” EDIȚIA A XI-A

BĂILEȘTI, 22 MARTIE 2014

CLASA a VI-a

Partea I (50 puncte)
Pentru întrebările 1-5 scrieţi pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Soluția ecuației $\frac{2!}{0!}+\frac{3!}{1!}+\frac{4!}{2!}+\cdots+\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=168$,unde $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n,\ iar\ \ 0!=1,$ este:

a)3; **b)**10; **c)**7; **d)**98

2. Fie unghiurile în jurul unui punct AOB, BOC, COD, DOA astfel încât $m(\sphericalangle COD)=40\%\cdot m(\sphericalangle AOB),\ m(\sphericalangle AOB)=5\cdot m(\sphericalangle\, DOA)$, iar $m(\sphericalangle COD)$ și $m(\sphericalangle BOC)$ sunt direct proporționale cu numerele 2 și 4. Atunci măsura unghiului determinat de bisectoarele unghiurilor AOB și AOD este egală cu:

a) 60^o; **b)**90^o; **c)** 80^o; **d)** 75^o.

3.Se dau punctele coliniare A, B, C, D în aceasta ordine. Știind că $\frac{AB}{AC}=\frac{CD}{BD}=\frac{2013}{2014}$, calculați $\frac{AD}{BC}$:

a)2014; **b)**2013; **c)**3016; **d)**4027.

4.Se aruncă două zaruri. Care este probabilitatea ca suma punctelor aparute pe cele două zaruri să fie un număr natural pătrat perfect ?

a)$\frac{7}{36}$, **b)**$\frac{7}{18}$, **c)**$\frac{5}{36}$, **d)** $\frac{5}{24}$.

5.Numerele *a* și *b* sunt invers proporționale cu 9 și 6. Cât reprezintă *b-a* din *b+a*?

a)10%, **b)** 20% , **c)** 40%, **d)** 50%.

Probleme propuse de prof. Nicolae Ivășchescu

Partea a II-a (40 puncte)
Pentru problemele 1 și 2 scrieţi pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (20 puncte)

a) Demonstrați că (*x, y, z*) sunt direct proportionale cu (2, 3, 5) dacă și numai dacă (*x, y, z*) și (15, 10, 6) sunt invers proporționale.
b) Generalizare.

Prof. Nicolae Ivășchescu, Craiova, G.M. 2/2014,

Problema 2 (20 puncte)

Fie triunghiul ABC și M un punct situat în interiorul lui astfel încât $\sphericalangle AMB\equiv\sphericalangle BMC\equiv\sphericalangle CMA$ și MA’=MB’=MC’, unde $AM\cap BC=\{A'\},\ BM\cap AC=\{B'\}, CM\cap AB=\{C'\}$. Demonstrați că triunghiul ABC este echilateral.

Revista ,,Sfera Matematicii” nr.8

Timp de lucru: 2 ore și 30 minute. Din oficiu se acordă: 10 puncte.

CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICĂ „SFERA” EDIȚIA A XI-A

BĂILEȘTI, 22 MARTIE 2014

CLASA a VII-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieţi pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Soluția ecuației $[2014-(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{2013}{2014})]:(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2014})=\frac{x}{2014}$, este :

a) 2011 b) 2012 c) 2013 d) 2014

2 . Bisectoarele interioare ale triunghiului MNP se intersectează în I. Dacă

2 m(<NIP) =3m(<M) și m(<MIP) =2m(<N) , atunci triunghiul MNP este :

a) isoscel b) echilateral c) dreptunghic d) oarecare

3. Dacă $\frac{x}{3}=\frac{y}{6}$ și 3y=2z , atunci numărul y reprezintă :

a) 50% din (x+z) b) 25% din z c) $\frac{3}{4}$ din x d) $\frac{3}{5}$ din(y - x)

4. În triunghiul ABC, AB=$2\sqrt{6}$ cm, AC = $4\sqrt{3}$ cm și BC= $6\sqrt{2}$ cm . Distanța dintre ortocentrul triunghiului și centrul său de greutate este :

a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$cm b) $\sqrt{2}$ cm c) $\sqrt{3}$ cm d) $\sqrt{8}$ cm

5. Numărul elementelor mulțimii A={ $x \in \boldsymbol{N}$ / $||x-1|-3|=5$} este :

a) 2 b) 1 c) 3 d) 4

Probleme propuse de prof. Marian Firicel, Calafat

PARTEA a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 si 2, scrieti pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (20 puncte)

Dacă $x, y \in \boldsymbol{R}$, x≥y și x+y =$2\sqrt{2025+xy}$, să se determine x - y.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, prof. București, ,,Sfera Matematicii" nr. 20-21

Problema 2 (20 puncte)

Se consideră rombul ABCD cu centrul O, E un punct pe segmentul (OA), dreapta AS perpendiculară pe dreapta BE, S∈ (CD). Dacă AS ∩ DB = {M}, arătați că dreptele CM și DE sunt perpendiculare.

prof. Marian Firicel, Calafat

Timp de lucru : 2 ore si 30 minute. Din oficiu se acorda 10 puncte

CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICĂ „SFERA”- EDIȚIA A XI-A

BĂILEȘTI, 22 MARTIE 2014

CLASA a VIII-a

Partea I (50 puncte)
Pentru întrebările 1-5 scrieţi pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Valoarea minimă a expresiei $E(x,y) = x^2 + 4y^2 - 12x - 8y + 40$ este egală cu:
a)0; **b)**1; **c)**2; **d)**3.

2.Numărul maxim de plane determinate de cinci puncte necoplanare este a iar numărul maxim de drepte determinate de alte cinci puncte este b. Numărul $a - b$ are valoarea:
a)3; **b)**2; **c)**1; **d)** 0.

3.Rezultatul calculului $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ este.:
a)$\sqrt{2}$ **b)** $2\sqrt{2}$ **c)** 2 **d)** $4\sqrt{2}$.

4.Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel incat $[a, b] \cap [\frac{a+3}{2}, \frac{b+4}{2}] = [1,3]$. Valoarea produsului $a \cdot b$ este egală cu:
a) -6 **b)** 3 **c)** -3 **d)** 6

5.Fie ABCDA' B'C'D' un cub. Măsura unghiului format de planul (A'BC) cu planul (C'BD) este egală cu:
a) 90º **b)** 45º **c)** 60º **d)** 72º

Partea a II-a (40 puncte)
Pentru problemele 1 şi 2 scrieţi pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (20 puncte)
În triunghiul ABC cu [AB] ≡ [AC], mediatoarea laturii [AB] intersectează pe (BC) în punctul T. În punctul A construim DA ⊥ (ABC) si notăm cu P, respectiv Q proiectiile punctului A pe dreptele DT, respectiv DC. Demonstrați că punctele B, P, Q sunt coliniare.

Prof. Ionel Tudor ,Giurgiu, G.M. 5/2009,

Problema 2 (20 puncte)
Aratați că $\frac{2(x+y)}{3} + \frac{1}{3xy} + \frac{3}{x+y} \geq 3$, pentru orice numere reale strict pozitive x și y.

Prof. Ionut Ivănescu, „Sfera Matematicii” nr.1 (2008-2009)

Timp de lucru: 2 ore 30 minute. Din oficiu: 10 puncte

BAREM DE NOTARE ȘI CORECTARE

Clasa a V-a

Partea I
1. b); **2.**b);**3.** b; **4.** c); **5.** d)

Partea a II-a

Problema 1

1. 2013(a+b+c)=12078…………………………………..……..7p
2. a+b+c=6……………………………………………..……..7p
3. a=1, ……………………………………………… ……..2p
4. b=2……………………………………………….…….2p
5. c=3…………………………………………… ……………..2p

Problema 2

1. $\underbrace{99\ldots9} = 10^{2009} - 1$…………………….........................3p
2. $(10^{2009} - 1) \cdot n = n10^{2009} - n =$………………………..…….3p
3. $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{2009} \underbrace{00\ldots0}_{2009\ cifre}} - \overline{a_1 a_2 \ldots a_{2009}}$……………………...4p
4. $(10 - a_{2009}) + (9 - a_{2008}) + \cdots + (9 - a_2) + (9 - a_1) + (a_{2009} - 1) + a_{2008} + \cdots + a_1 =$……………………………….…5p
5. $10 + 9 \cdot 2008 - 1 = 9 \cdot 2009$……………………………..…5p

BAREM DE NOTARE ȘI CORECTARE

Clasa a VI-a

Partea I

1. c); **2.**b);**3.** d; **4.** a); **5.** b)

Partea a II-a

Problema 1

a) “→”

$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$……………………………2p

$\frac{x}{\frac{2}{30}} = \frac{y}{\frac{3}{30}} = \frac{z}{\frac{5}{30}}$…………………………2p

(x, y, z) i.p. (15, 10, 6)……………2p

“←”

$\frac{x}{\frac{1}{15}} = \frac{y}{\frac{1}{10}} = \frac{z}{\frac{1}{5}}$…………………………2p

$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$…………………………..…2p

(x, y, z) d.p. (2, 3, 5)…………… 2p

b)

Demonstrati ca (x, y, z) sunt direct proportionale cu (a, b, c) daca si numai daca (x, y, z) si (d, e, f) sunt invers proportionale, unde ad=be=cf……………………………….3p

(x, y, z) d.p. (a,b,c); (x, y, z) i.p. (d, e, f)……………………………..1p

ad=be=cf=A………………………………………………………………..1p

$a = \frac{A}{d}, b = \frac{A}{e}, c = \frac{A}{f}$…………………………………………………. …..1p

Finalizare…………………………………………………………………………2p

Problema 2

1. $\widehat{AMB} \equiv \widehat{BMC} \equiv \widehat{CMA} = 120°$……………………………..………………..3p
2. $\widehat{B'MC} \equiv \widehat{A'MC} = 60°$…………………………………………………………3p
3. $\Delta A'MC \equiv \Delta B'MC$ … … … ….…………………………………..3p
4. $\Delta AMC \equiv \Delta BMC$ … ...……………………………………..3p
5. $AC = BC$…………………………………………………..3p
6. Analog AC=AB……………………………………….3p
7. Finalizare……………………………………………….2p

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

CLASA a VII-a

PARTEA I

1	2	3	4	5
d	c	a	d	b

PARTEA a II-a

Problema 1 (20 puncte)

Ridicand la pătrat, rezultă : $x^2+2xy+y^2=4(2025+xy)$ ………………… 5p

Prelurand relatia obtinuta, avem $(x-y)^2=8100$ ………………………………… 5p

$|x-y|=90$ ………………………………………………………………………3p

$x-y=90$ sau $x-y=-90$ ……………………………………………………… 3p

Din $x\geq y$, rezulta $x-y\geq 0$, de unde solutia problemei $x-y=90$ ………………… 4 p.

Problema 2 (20 puncte)

Notăm $BE \cap AM=\{L\}$

Diagonalele rombului sunt perpendiculare……………………………………………………………………2p
În triunghiul AMB, AO si BM sunt perpendiculare, BE si AM sunt perpendiculare, $AO \cap BL=\{L\}$,rezulta că E este ortocentrul triunghiului AMB …………….5p

Dreapta ME este perpendiculara pe AB ……………………………………… 3p

ABCD este romb $\Rightarrow$ AB// CD , deci ME este perpendiculara pe CD ……………. 3p

Analog, in triunghiul CED ,dreptele EM si DO sunt perpendiculare pe CD respectiv pe AC, deci M este ortocentrul triunghiului CED……………………………………5p

Concluzia : dreptele CM si DE sunt perpendiculare ……………………………2p

BAREM DE NOTARE ȘI CORECTARE

Clasa a VIII-a

Partea I

1. a); **2.**d);**3.** c; **4.** -3); **5.** a)

Partea a II-a

Problema 1

Aplicand T catetei: $AD^2 = DP \cdot DT\ si\ AT^2 = PT \cdot DT$................4p

$\frac{DP}{PT} = \frac{AD^2}{AT^2}$...2p

Analog$\frac{CQ}{QD} = \frac{AC^2}{AD^2}$…………………………..…………………………2p

$\frac{BT}{BC} \cdot \frac{CQ}{QD} \cdot \frac{DP}{PT} = \frac{BT}{BC} \cdot \frac{AC^2}{AD^2} \cdot \frac{AD^2}{AT^2} = \frac{BT \cdot AC^2}{BC \cdot AT^2}$…(1)....……………………1p

$\Delta ABC \sim \Delta TAB, \frac{AC}{BT} = \frac{BC}{AB}$………(2).……………………………….2P

AT=TB………(3).……………………………………………2P

$AC^2 = BC \cdot BT$……………………………………………………2p

$\frac{BT}{BC} \cdot \frac{CQ}{QD} \cdot \frac{DP}{PT} = \frac{BT \cdot BT \cdot BC}{BC \cdot BT^2}$…………………………………..………3p

Aplicand reciproca T. Menelaus in ΔDCT, pentru punctele B, P, Q, obtinem concluzia…………………………………………………2p

Problema 2

$\frac{2}{3}(x+y) + \frac{1}{3xy} + \frac{3}{x+y} = \frac{x+y}{3} + \frac{3}{x+y} + \frac{x+y}{3} + \frac{1}{3xy}$ ... ...……2p

$\frac{x+y}{3} + \frac{3}{x+y} \geq 2$…………………………………………….2p

Se arată că $\frac{x+y}{3} + \frac{3}{3xy} \geq 1$, xy(x+y)+1≥ $3xy$………………..2p

$x + y = s,\ xy = p.$ Inegalitatea devine: ps+1≥ $3p$…….2p

Este suficient sa dem. că $2p\sqrt{p} + 1 \geq 3p$…………………2p

Notam $p = t^2\ cu\ t > 0$, Inegalitatea devine $2t^3 + 1 \geq 3t^2$……..2p

$(t-1)(2t^2 - t - 1) \geq 0$ ………………………………3p

$(t-1)^2(2t+1) \geq 0$ relatie adevarata…………………………3p

Finalizare ……………………………………………..2p