CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„GRIGORE c. Moisil”
Ediția a XX- A , Baia Mare, 11 – 13 MARTIE 2005

SUBIECTE MATEMATICĂ CLASA A V – A

Subiectul 1. Aflați numărul $x \in N$ şi cifra a astfel încât

$$7^{x-2} + 18 = \overline{1a}^{2}.$$

Maria S. POP

Subiectul 2. Într- un grup de elevi fiecare discută cu fiecare, o singură dată, timp de 2 minute.

a) Dacă grupul este format din 5 elevi, câte minute durează discuțiile?
b) Dacă discuțiile durează 10 ore, câți elevi sunt în grup?

Ioana ZELINA

Subiectul 3. În sistemul de numere cu baza 10 să se calculeze suma primelor 11 numere formate folosind o singură cifră.

Enunțați şi rezolvați problema în sistemul de numerație cu baza 5.

Ioana ZELINA

Subiectul 4. O cutie paralelipipedică cu dimensiunile L = 12 cm, l = 8 cm şi I = 4 cm se umple cu zahăr în formă cubică.

a) Ce dimensiuni, exprimate în numere naturale, au cuburile de zahăr care umplu complet această cutie şi câte cuburi sunt necesare?

b) Ce dimensiuni au cutiile cubice ce pot fi umplute (fără a rămâne spații libere) cu bucăți de zahăr cu dimensiunile L = 12 cm, l = 8 cm şi I = 4 cm şi câte asemenea cutii există?

Ioana ZELINA

SUBIECTE MATEMATICĂ CLASA A VI A

Subiectul 1. Se dă triunghiul echilateral ABC şi punctul M $\in$ (BC). Din M se duce dreapta MP perpendiculară pe dreapta AC (P $\in$(AC)), iar dreapta MP intersectează dreapta AB în D. Să se arate că :

a) MB = BD
b) AB = 2(CP + BN), unde N este mijlocul lui (MD).

GAZETA MATEMATICĂ 6/1997

Subiectul 2. Fie x, y, z $\in Q^*$ astfel încât

$$\frac{2x}{3y+4z} = \frac{3y}{2x+4z} = \frac{4z}{2x+3y}.$$

Să se calculeze:

a) $(x+3y+2z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{2z}\right)$.

b) $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$.

Arătați că numărul $n = \frac{2x}{3y}+\frac{3y}{4z}+\frac{2z}{x}$ este numărul natural.

GAZETA MATEMATICĂ 1/1998

Subiectul 3. Determinați numerele $N = \overline{a} * \overline{b0c}$, unde *a, b, c* sunt cifre ale sistemului zecimal şi *a* = *b* + *c,* ştiind că numerele $\overline{a}$ şi $\overline{b0c}$ sunt numere prime.

Gabriella KOVACS

Subiectul 4. Un automobil parcurge drumul din oraşul A în oraşul B de la ora 8 la ora 11. A doua zi parcurge drumul înapoi de la ora 12. Se ştie că automobilul merge cu 60 km/h la urcuş, 75 km/h pe drum drept, 100 km/h la coborâre. Se cere:

a) Ce distanță este între oraşul A şi B ?
b) Să se arate că există un loc pe drum prin care automobilul a trecut la aceeaşi oră în cele două zile.

Vasile POP

SUBIECTE MATEMATICĂ CLASA A VII – A

Subiectul 1. Determinați cifrele *a, b,* $1 < b < 9$ pentru numărul

$$\sqrt{\overline{a,\underbrace{a\ldots\ldots\ldots\ldots a}_{m\,cifre}\left(\underbrace{b\ldots\ldots\ldots b}_{n\,cifre}\right)}+\overline{b,\underbrace{b\ldots\ldots\ldots\ldots b}_{m\,cifre}\left(\underbrace{a\ldots\ldots\ldots\ldots a}_{n\,cifre}\right)}}$$

este rațional

Maria S. POP

Subiectul 2.

a) Demonstrați că pentru orice *a,b,c* > *0* are loc inegalitatea
$a+b+c \le \sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$
b) Determinați *x* şi *y* astfel încât
$\sqrt{x+147}+\sqrt{y+27}+\sqrt{126-x-y}=30$.

Maria S. POP, Vasile POP

Subiectul 3. Pe catetele AC şi AB ale triunghiului dreptunghic ABC se construiesc în exterior pătratele ABDE şi ACFG şi fie $DC \cap AB = \{U\}$, iar $BF \cap AC = \{V\}$.

a) Arătați că $UV \parallel DF$.
b) Dacă $UV \cap BD = \{P\}$ şi $UV \cap CF = \{Q!\}$, arătați că DF = PQ+UV

Dorel MIHEȚ

Subiectul 4. Fie ABC un triunghi cu AB<AC şi I intersecția bisectoarelor BB' şi CC'. Notăm cu M intersecția dreptei BC cu perpendiculara în A pe AI. Să se arate că punctele M, C' şi B' sunt coliniare.

Vasile POP.

SUBIECTE MATEMATICĂ CLASA A VIII A

Subiectul 1. Fie a >0 . Să se determine $n \in N$ pentru care

$$\left(1+a+a^2+\ldots\ldots\ldots a^n\right)\left(1+a^{n+1}\right)=(1+a)\left(1+a^2\right)\left(1+a^4\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\left(1+a^{2n}\right)$$

Andrei HORVAT- MARC

Subiectul 2. Fie ABCD un tetredru regulat cu muchia a, înălțimea h, distanța dintre două muchii (opuse) d..

a) Să se afle aria secțiunii tetraedrului cu planul determinat de înălțime şi o muchie consecutivă cu aceasta.
b) Să se arate că 3h = $2d\sqrt{3}$.

***

Subiectul 3. Fie x, y>0, numere reale, astfel încât x + y = 1. Să se determine valoarea minimă a expresiei $E(x,y)=x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$.

Gheorghe SZOLLOSY

Subiectul 4. Se consideră funcția $f:R\to R,\ f(x)=a+bx+cx^2$, unde $a,b,c\in R$, $c\neq o$. Să se arate că dacă *f(-1), f(0)* și *f(3)* sunt numere întregi, atunci $f(n^2-1)$ este număr întreg pentru orice $n\in N$.

Vasile POP

SUBIECTE MATEMATICĂ CLASA A IX-A

Subiectul 1. Fie numerele reale $x_1;x_2;...;x_n\in(0;\infty), n\in N, n\geq 2.$ Să se arate că

$$\frac{x_1^3}{x_1^2+x_2^2}+\frac{x_2^3}{x_2^2+x_3^2}+...+\frac{x_n^3}{x_n^2+x_1^2}\rangle\frac{1}{3}(x_1+x_2+...+x_n)\ .$$

Vasile BERINDE

Subiectul 2. Să se determine funcțiile $f:R\to R$ care verifică relația

$f(x^3)-f(y^3)=(x^2+xy+y^2)(f(x)-f(y))$, pentru orice $x,y\in R$.

Vasile POP

Subiectul 3. Fie $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], r\in(0;\infty)$ și sistemul $\begin{cases}x\cos t+y\sin t=r\\ x\sin t+y\cos t=r\end{cases}$.

a) Rezolvați sistemul.

b) Determinați locul geometric al punctelor $S=\{(x;y)|(x;y)$ este soluția sistemului $\}$.

Ioana ZELiNA

Subiectul 4. Se consideră triunghiul ABC și numărul natural $n\in N^*$. Fie $B`$ , $C`$ mijloacele laturilor $[AC]$, respectiv $[AB]$ și punctele $M_n\in[BC], N_n\in[BB`]$ astfel încât $\overrightarrow{BM_n}=\frac{1}{2n}\overrightarrow{BC}$ , respectiv $\overrightarrow{BN_n}=\frac{1}{n+1}\overrightarrow{BB`}$. Să se arate că:

a) Punctele $C`, \mathrm{N}_\mathrm{n}, M_n$ sunt colineare pentru $n\in N^*$.

b) $\overrightarrow{N_2M_2}+\overrightarrow{N_3M_3}+...+\overrightarrow{N_nM_n}=\frac{1}{2}\overrightarrow{C`N_2}+\frac{1}{3}\overrightarrow{C`N_3}+...+\frac{1}{n}\overrightarrow{C`N_n}$ pentru orice $n\in N^*$.

Andrei HORVAT-MARC

SUBIECTE MATEMATICĂ CLASA A X-A

Subiectul 1. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases}\log_3 x+\log_5 y=2\\ 3^y-5^x\geq 118\\ \log_{\frac{1}{3}} x-\log_{\frac{1}{5}} y\leq 0\end{cases}$.

Vasile BERINDE

Subiectul 2. Să se arate că sistemul de inecuații $\begin{cases} x_1 * x_2 + y_1 * y_2 \langle 0 \\ x_1 * x_3 + y_1 * y_3 \langle 0 \\ x_1 * x_4 + y_1 * y_4 \langle 0 \\ x_2 * x_3 + y_2 * y_3 \langle 0 \\ x_2 * x_4 + y_2 * y_4 \langle 0 \\ x_3 * x_4 + y_3 * y_4 \langle 0 \end{cases}$ nu are soluții reale.

Vasile POP

Subiectul 3. Fie $a, b \in R$ şi $n \in N^*$.

a) Să se determine numărul de soluții $(x; y) \in R\ X\ R$ al sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} x^{2n+1} - C_{2n+1}^{2} * x^{2n-1} * y^2 + C_{2n+1}^{4} * x^{2n-3} * y^4 - ... + (-1)^n C_{2n+1}^{2n} * x * y^{2n} = a \\ y^{2n+1} - C_{2n+1}^{2} * y^{2n-1} * x^2 + C_{2n+1}^{4} * y^{2n-3} * x^4 - ... + (-1)^n C_{2n+1}^{2n} * y * x^{2n} = b \end{cases}$$

b) Să se arate că, pentru orice soluție $(x; y)$, valoarea sumei $x^2 + y^2$ este aceeaşi.

Vasile POP

Subiectul 4. a) Să se demonstraze că dacă *A, B, C* sunt unghiurile unui triunghi, atunci avem relațiile:

i) tg A + tg B + tg C = tg A tg B tg C.

ii) sin 2A + sin 2B + sin 2C = 4 sin A * sin B * sin C.

c) Fie $[Ox; [Oy; [Oz$ semidrepte necoplanare variabile astfel încât $m(\square\ xOy) + m(\square\ yOz) + m(\square\ zOx) = 180^0$. Dacă *X; Y; Z* sunt respectiv măsurile unghiurilor diedre dintre planele $(yOz); (zOx); (xOy)$, să se arate că cos X + cos Y + cos Z = constant.

Gheorghe SZOLOSSY

SUBIECTE MATEMATICĂ CLASA A XI-A

Subiectul 1 În planul xOy se consideră parabola $(P): y = x^2$ şi punctele $A(-1;1) \in (P); B_0(1;0) \in Ox$. Se definesc recursiv punctele $A_k \in (P); B_k \in Ox, (k \geq 1)$ în modul următor: $\begin{cases} A_{k+1} \text{ este intersecția dreptei } AB_k \text{ cu parabola } (P); \\ B_{k+1} \text{ este proiecția lui } A_{k+1} \text{ pe axa } Ox. \end{cases}$

Arătați că dacă punctul A_k are coordonatele $(x_k; y_k)$, atunci:

a) Şirul de termen general $S_n = x_0 + x_1 + ... + x_n$ este divergent;

b) Şirul de termen general $T_n = y_0 + y_1 + ... + y_n$ este convergent.

Vasile POP

Subiectul 2. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\in N}$, definit prin relațiile $x_0 \in R, x_{n+1} = 2x_n^2 + 2x_n - 1$, pentru orice $n \in N$.

a) Aflați numerele $M \in R$ cu proprietatea că dacă $x_0 \le M$ atunci $x_n \le M$, oricare ar fi $x \in N^*$.

b) Arătați că pentru $x_0 \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$, şirul $(x_n)_{n\in N}$ este convergent şi calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

c) Determinați expresia x_n în funcție de x_0 şi *n*.

Vasile BERINDE

Subiectul 3. Fie $g : R \to R$ o bijecție continuă cu proprietatea că $g \circ g$ are o mulțime finită, nevidă de puncte fixe ($x_0 \in R$ este un punct fix al lui *h*, $h: R \to R$, dacă $h(x_0) = x_0$). Determinați funcțiile continue $f : R \to R$ care verifică relația $f(x) = f(g(x))$, oricare ar fi $x \in R$.

Dorian POPA

Subiectul 4. Fie matricele $A_1; A_2; ...; A_n \in M_n(C)$. Arătați că :

a) $\det(A_1 + A_2) + \det(A_1 + \varepsilon A_2) + ... + \det(A_1 + \varepsilon^{n-1} A_2)$ = n (det A_1 + det A_2), unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

b) $\sum \det(\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2 + ... + \varepsilon_n A_n) = n^n \sum\limits_{k=1}^{n}$ det A_k, unde suma din membrul stâng se efectuează după toate cele n^n alegeri $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \in C^n$, cu proprietatea că $\varepsilon_k^n = 1, \left(k = \overline{1,n}\right)$.

Vasile POP

SUBIECTE MATEMATICĂ CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie (*A*, + , ·) un inel cu proprietatea că $x^3 = x$, oricare ar fi $x \in A$. Demonstrați că

a) Pentru orice $x, y \in A$, avem $x^2yx = yx$ şi $xyx^2 = xy$;

b) Inelul (*A*, + , ·) este comutativ.

Maria S. POP

Subiectul 2. Determinați funcțiile continue $f : [0;\infty) \to R$ cu proprietatea $\int_1^x f(t)dt = \int_{x^k}^{x^{k-1}} f(t)dt$, oricare ar fi $k \in N, x \in (0;\infty)$.

Dan BĂRBOSU

Subiectul 3. Fie $f, g : \left(0; \frac{\pi}{2}\right] \to R$, $f(x) = x^2 ctg^2 x, g(x) = \ln(\sin x)$.

a) Stabiliți o relație între primitivele lui *f* şi *g* pe $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$;

b) Notând cu $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$, $J(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, calculați: $\lim_{\alpha \to 0} I(\alpha)$ şi $\lim_{\alpha \to 0} J(\alpha)$.

Gheorghe SZOLOSSY

Subiectul 4. Fie (K, + , *) un corp comutativ în care există elementele nenule, distincte *a, b, c* astfel ca mulțimea $M = \left\{a^n + b^n + c^n \middle| n \in N^*\right\}$ să fie finită.

a) Să se arate că există un grup multiplicativ (G, *) , G $\subset$ K, care conține pe *a, b* şi *c*;

b) Rămâne rezultatul dacă în loc de „corp comutativ" se ia „inel comutativ" ?

Vasile POP

NOTĂ: Timp de lucru 3 ore
Toate subiecte sunt obligatorii.

Universitatea de Nord Baia Mare, Departamentul de Matematică şi Informatică,
Str. Victoriei nr. 76, 430122 Baia Mare, tel 0262 – 427466, Fax: 0262 - 275368