Olimpiada de Matematică

Etapa județeană – 11.03.2006

Clasa a V-a

Subiectul 1

a) Fie $A=\{x\in N \mid x \text{ divizibil cu } 17\}$, $B=\{x\in N \mid x \text{ divizibil cu } 23\}$ şi $C=\{x\in N \mid 1\le x\le 100\}$.

Să se determine mulțimea $(A\cup B)\cap C$.

b) Fie T un număr natural cu următoarele trei proprietăți:

1. T are 2006 cifre;
2. prima cifră a lui T este 3;
3. numărul format din orice două cifre consecutive ale lui T este divizibil cu 17 sau cu 23.

Aflați valorile pe care le poate lua ultima cifră a numărului T.

Subiectul 2

a) Arătați că numărul $\frac{1}{2}+\frac{2^1}{2^2}+\frac{2^2}{2^3}+\cdots+\frac{2^{2003}}{2^{2004}}+\frac{2^{2004}}{2^{2005}}+\frac{2^{2005}}{2^{2006}}$ este natural.

b) Se consideră 2006 numere naturale având suma 20060. Se ridică fiecare număr la puterea 2005. Să se arate că suma acestor puteri este multiplu de 10.

Subiectul 3

a) Dacă $x^2yz^3=7^4$ şi $xy^2=7^5$, calculați produsul xyz.

b) Dacă $a=3^p$, $b=3^q$, $c=3^r$ şi $d=3^s$, unde p,q,r,s sunt numere naturale nenule, determinați cea mai mică valoare pe care o poate lua suma $p+q+r+s$ astfel încât $a^2+b^3+c^5=d^7$.

Subiectul 4

În câte moduri se pot alege numerele naturale a,b,c,d din mulțimea $\{0,1,2,\cdots,9\}$ astfel încât $a+b+c+d$ să fie multiplu de 3 şi $a<b<c<d$?

Selecție şi prelucrare: Gabriela Constantinescu şi Cătălin Zîrnă

Notă

1. Timp de lucru – 3 ore.
2. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.
3. Nu se acordă puncte din oficiu.

Succes!