Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada de Matematică
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti
11 Martie 2006

CLASA A VIII-A

Problema 1. Pe planul triunghiului ABC dreptunghic în A ridicăm perpendicularele din punctele A şi B, de aceeaşi parte a planului, pe care considerăm punctele M şi N astfel încât $BN < AM$. Ştiind că $AC = 2a, AB = a\sqrt{3}, AM = a$ şi că planul MNC face cu planul ABC un unghi de $30°$, să se afle

a) aria triunghiului MNC;

b) distanţa de la punctul B la planul MNC.

Problema 2. Pentru un număr natural n, notăm cu $u(n)$ cel mai mare număr prim mai mic sau egal cu n şi $v(n)$ cel mai mic număr prim mai mare decât n. Să se arate că

$$\frac{1}{u(2)v(2)} + \frac{1}{u(3)v(3)} + \frac{1}{u(4)v(4)} + \cdots + \frac{1}{u(2010)v(2010)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2011}.$$

Problema 3. Să se arate că există o infinitate de numere iraţionale x şi y cu proprietatea că $x + y = xy \in \mathbb{N}$.

Problema 4. a) Să se arate că vârfurilor unui cub li se pot atribui numerele 1 sau -1 astfel încât produsul numerelor atribuite vârfurilor de pe fiecare faţă să fie egal cu -1.

b) Să se arate că pentru o prismă hexagonală regulată o astfel de atribuire nu este posibilă.

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect notat cu 7 puncte