

## 2. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte

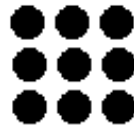
### A. Pătrate perfecte

Vom spune despre un număr că este pătrat perfect dacă este egal cu pătratul unui număr natural. Așadar,  $n$  este pătrat perfect dacă există  $k \in \mathbb{N}$  astfel încât  $n = k^2$ .

**Ex.** Numărul 25 este pătrat perfect, deoarece  $25 = 5^2$ .

Numărul 18 nu este pătrat perfect, deoarece niciun număr natural ridicat la pătrat nu este egal cu 18.

Denumirea de „pătrat perfect” este ilustrată în figura alăturată. De exemplu, numărul 9 este pătrat perfect (deoarece  $9 = 3^2$ ) și iată cum 9 obiecte pot fi aranjate astfel încât să formeze un pătrat.



Să scriem în ordine crescătoare pătratele perfecte: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, ... (evident, șirul este infinit). Observăm că ultima cifră a pătratelor perfecte poate fi doar 0, 1, 4, 5, 6, 9, deci niciun pătrat perfect nu are ultima cifră 2, 3, 7, 8. Acest lucru este util în unele situații.

**Ex.** Numărul 9637 nu este pătrat perfect, deoarece are ultima cifră 7.

**Atenție!** Nu orice număr natural care are ultima cifră 0, 1, 4, 5, 6, 9 este pătrat perfect.

**Ex.** Numărul 24 nu este pătrat perfect, chiar dacă are ultima cifră 4.

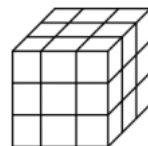
### B. Cuburi perfecte

Vom spune despre un număr că este cub perfect dacă este egal cu cubul unui număr natural. Așadar,  $n$  este cub perfect dacă există  $k \in \mathbb{N}$  astfel încât  $n = k^3$ .

**Ex.** Numărul 8 este cub perfect, deoarece  $8 = 2^3$ .

Numărul 24 nu este cub perfect, deoarece niciun număr natural ridicat la puterea a 3-a nu este egal cu 24.

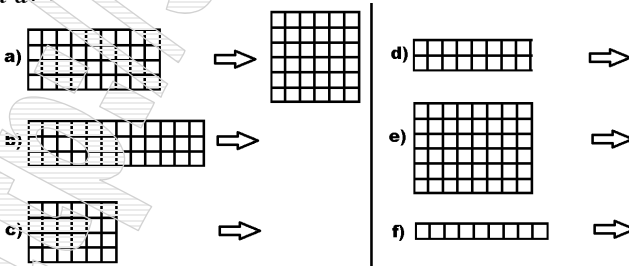
Denumirea de „cub perfect” este ilustrată în figura alăturată. De exemplu, numărul 27 este cub perfect (deoarece  $27 = 3^3$ ) și iată cum 27 obiecte pot fi aranjate astfel încât să formeze un cub.



**Observație** Ultima cifră a unui cub perfect poate fi oricât.

### Exerciții și probleme

1. Explicați de ce numărul 49 este pătrat perfect.
2. De ce numărul 56 nu este pătrat perfect?
3. În șirul de numere naturale 64, 100, 136, 144, 225 unui singur nu este pătrat perfect. Care este acesta?
4. Un singur element al mulțimii  $A = \{60; 400; 80; 200; 150\}$  este pătrat perfect. Identificați acest element.
5. Găsiți un pătrat perfect de forma  $\overline{16x}$ .
6. Aflați toate pătratele perfecte de forma  $\overline{a6}$ .
7. Calculați  $28^2$  și  $29^2$ , iar apoi arătați că 816 nu este pătrat perfect.
8. Calculați  $33^2$  și apoi arătați că există un singur pătrat perfect de forma  $\overline{10ab}$ .
9. Fără a efectua înmulțirea, arătați că numărul 309·309 este pătrat perfect.
10. Arătați că numerele  $14 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 4$  și  $15 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 5$  sunt pătrate perfecte.
11. Folosind factorul comun, demonstrați că numărul  $n$  este pătrat perfect, unde  $n = 297 \cdot 35 + 297 \cdot 262$ .
12. Dacă  $a = 2018 \cdot 2017$ , arătați că  $a + 2018$  este pătrat perfect.
13. În care din situațiile de mai jos pătrățelele care compun dreptunghiurile pot fi rearanjate pentru a forma un pătrat, așa cum este indicat la a)?



14. Arătați că toate pătrățelele care compun cele șase dreptunghiuri din imaginea de mai sus se pot rearanja pentru a forma un pătrat mai mare.

15. Arătați că nicio ecuație de mai jos nu are soluția pătrat perfect:

a)  $3x = 114$

b)  $4a - 5 = 103$

c)  $2(n+3) = 84$

d)  $y+2,8=12-1,2$

e)  $\frac{1}{7} + b = \frac{22}{7}$

f)  $\frac{x}{9} - \frac{8}{3}$

16. Arătați că toate ecuațiile de mai jos au soluția pătrat perfect:

a)  $3n+3 = 51$

b)  $6x = 486$

c)  $3(y-1,4) = 22,8$

d)  $5+7c = 348$

e)  $\frac{2}{6} = \frac{12}{k}$

f)  $\frac{x}{6} = 20,8(3)$

17. Aflați elementele mulțimii

$$P = \{ x / 100 \leq x < 200 \text{ și } x \text{ este pătrat perfect} \}.$$

18. Câte elemente ale mulțimii  $K = \{ x \in \mathbb{N} / 10 \leq x \leq 99 \}$  nu sunt pătrate perfecte?

19. Media aritmetică a numerelor  $5^3$  și  $3^4$  este pătrat perfect?

20. Aflați cifra  $c$ , știind că media aritmetică a cifrelor numărului  $\overline{5c}$  este pătrat perfect.

21. Se consideră mulțimile  $A = \{ x \in \mathbb{N}^* / x < 40 \text{ și } x \text{ este pătrat perfect} \}$  și  $B = \{ y / y = 2^n, n \in \mathbb{N}, n \leq 5 \}$ . Aflați  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$ ,  $B - A$ .

22. Fie mulțimile  $E = \{ a \in \mathbb{N} / 3a + 2 \leq 74 \text{ și } a \text{ este pătrat perfect} \}$  și  $F = \{ b \in \mathbb{N}^* / 2^b < 50 \}$ . Aflați  $E \cup F$ ,  $E \cap F$ ,  $(F - E) \cup (E - F)$ .

23. Arătați că numărul  $5^{36}$  este pătrat perfect.

24. Demonstrați că numărul  $13^{38} \cdot 13 : (13^3)^5$  este pătrat perfect.

25. Numărul patru milioane este pătrat perfect?

26. Numărul un miliard este pătrat perfect?

27. Sublimați pătratele perfecte din șirul: 1982,  $3^3$ , 1225, 125,  $4^{31}$ , 225.

28. Stabiliți câte pătrate perfecte se află în mulțimea T, dacă

$$T = \{ 2^5; 326; 256; 5^{46}; 2008; 1000 \}$$

29. Arătați că produsul a două numere naturale pătrate perfecte este un pătrat perfect.

30. Se consideră un număr natural oarecare  $t$ . Demonstrați că produsul numerelor  $3t$  și  $12t$  este pătrat perfect.
31. Fie numărul  $a = 10n + 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- Calculați valorile lui  $a$  pentru  $n = 0$ ,  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$ ,  $n = 4$
  - Demonstrați că nu există pătrate perfecte de forma  $10n + 2$
32. Arătați că nu există pătrate perfecte de forma  $5k + 3$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .
33. Verificați dacă cel puțin trei din divizorii lui 72 sunt pătrate perfecte.
34. Scrieți două numere naturale pătrate perfecte, divizibile cu 13.
35. Enumerați toate fracțiile subunitare care au numitorul 36 și numărătorul pătrat perfect.
36. Scrieți toate fracțiile supraunitare care au numărătorul 48 și numitorul pătrat perfect.
37. Arătați că numărul  $2^{102} + 1934$  nu este pătrat perfect.
38. Demonstrați că numărul  $24^{25} - 23^{25}$  nu este pătrat perfect.
39. Arătați că numărul  $n = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 38) + 39$  este pătrat perfect.
40. Să se arate că numărul  $305 + (1 + 2 + 3 + \dots + 304) \cdot 2$  este pătrat perfect.
41. Din produsul a două numere naturale consecutive se scade numărul mai mic. Demonstrați că diferența astfel obținută este pătrat perfect.
42. La produsul a două numere naturale consecutive se adună numărul mai mare. Explicați de ce suma astfel obținută este pătrat perfect.
43. Arătați că suma  $S = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{33}$  este pătrat perfect.
44. Fie numărul  $n = 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{55}$ . Demonstrați că  $4n + 5$  este pătrat perfect.
- 
45. Explicați de ce numărul 48 nu este cub perfect.
46. De ce numărul 64 este cub perfect?
47. În șirul de numere naturale 36, 105, 125, 148, 225 unul singur este cub perfect. Care este acesta?
48. Un singur element al mulțimii  $C = \{27; 0; 1000; 25; 1; 8\}$  nu este cub perfect. Care este acest element?

49. Găsiți un cub perfect de forma  $\overline{2ab}$ .
50. Aflați toate cuburile perfecte de forma  $\overline{xy}$ .
51. Calculați  $8^3$  și  $9^3$ , iar apoi arătați că nu există cuburi perfecte de trei cifre, care să aibă cifra sutelor 6.
52. Calculați  $12^3$  și apoi arătați că există un singur cub perfect de forma  $\overline{17cd}$ .
53. Fără a efectua înmulțirea, arătați că  $57 \cdot 57 \cdot 57$  este cub perfect.
54. Arătați că numărul  $12 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4$  este cub perfect.
55. Folosind factorul comun, demonstrați că numărul  $m$  este cub perfect, unde  $m = 807^2 \cdot 403 + 404 \cdot 807^2$ .
56. Dacă  $x = 653 \cdot 654^2$ , arătați că  $x + 654^3$  este cub perfect.
57. Arătați că nicio ecuație de mai jos nu are soluția cub perfect:
- a)  $a + 4 = 112$                       b)  $5x - 1 = 104$                       c)  $(y - 3) \cdot 9 = 1440$
- d)  $92,6 - n = 18 + 5,6$               e)  $p - \frac{4}{15} = \frac{41}{15}$                       f)  $\frac{1}{9} = \frac{12}{n}$
58. Arătați că toate ecuațiile de mai jos au soluția cub perfect:
- a)  $5x + 4 = 44$                       b)  $3z = 375$                       c)  $5(2,8 - y) = 9$
- d)  $a + 4a + 2 = 137$                       e)  $\frac{1000}{r} = 1$ ;                      f)  $\frac{x}{9} + 0,4 = 3\frac{4}{9}$
59. Aflați elementele mulțimii  
 $A = \{k / 210 \leq k < 512 \text{ și } k \text{ este cub perfect}\}$ .
60. Câte elemente ale mulțimii  $B = \{y \in \mathbb{N} / 36 \leq y \leq 151\}$  nu sunt cuburi perfecte?
61. Aflați cifra  $c$ , știind că media aritmetică a cifrelor numărului  $\overline{6c9}$  este cub perfect.
62. Media aritmetică a numerelor  $1^3$ ,  $3^0$  și  $22^1$  este cub perfect?
63. Se consideră mulțimile  $G = \{n \in \mathbb{N} / 3 < n < 40 \text{ și } n \text{ este cub perfect}\}$  și  $H = \{p / p = 3^a, a \in \mathbb{N}^*, a \leq 4\}$ . Aflați  $G \cup H$ ,  $H \cap G$ ,  $H - G$ ,  $G - H$ .

64. Fie mulțimile  $X = \{x \in \mathbb{N} / 51 \geq 3 + 6x \text{ și } x \text{ este cub perfect}\}$  și  $Y = \{n \in \mathbb{N}^* / 3^{n+1} < 105\}$ . Aflați  $X \cup Y$ ,  $Y \cap X$ ,  $(X - Y) \cup ((X \cap \mathbb{N}^*))$ .
65. Arătați că numărul  $(9^3)^9 : 9 \cdot 9^{19}$  este cub perfect.
66. Demonstrați că numărul  $25^{1017}$  este cub perfect.
67. Subliniați cuburile perfecte din șirul: 343,  $124^3$ , 100, 125,  $6^{24}$ , 1500.
68. Stabiliți câte cuburi perfecte se află în mulțimea D, dacă  $D = \{3^4; 100000; 512; 27^7; 128; 1\}$
69. Arătați că produsul a două numere naturale cuburi perfecte este un cub perfect.
70. Se consideră un număr natural oarecare  $n$ . Demonstrați că produsul numerelor  $4n$  și  $2n^2$  este cub perfect.
71. Verificați dacă cel puțin doi din divizorii lui 56 sunt cuburi perfecte.
72. Scrieți două numere naturale cuburi perfecte, divizibile cu 7.
73. Scrieți toate fracțiile supraunitare care au numărătorul 66 și numitorul cub perfect
74. Enumerați toate fracțiile subunitare care au numitorul 64 și numărătorul cub perfect.
75. Arătați că numărul  $2^{56} + 2^{58}$  este cub perfect.
76. Demonstrați că numărul  $32^9 + 9 - 4^{15}$  nu este cub perfect.
77. Arătați că numărul  $n = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 52) \cdot 54$  nu este cub perfect.
78. Să se arate că numărul  $(3 + 6 + 9 + \dots + 123) + 161$  este cub perfect.
79. Arătați că suma  $A = 2^{35} + 2^{34} + 2^{33} + \dots + 2^2 + 2^1 + 2$  este cub perfect.
80. Fie numărul  $b = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{98}$ . Demonstrați că dacă adunăm 3 la dublul lui  $b$  se obține un cub perfect.
81. Arătați că numărul 64 este simultan pătrat perfect și cub perfect.
82. În mulțimea  $S = \{900; 729; 1.000.000; 216; 72; 144; 250\}$  sunt două elemente care sunt simultan pătrate perfecte și cuburi perfecte. Care sunt aceste elemente?